

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA
DE TELECOMUNICACIÓN

INGENIERÍA DE TELECOMUNICACIÓN -
INGENIERÍA TÉCNICA EN INFORMÁTICA DE SISTEMAS

PROYECTO FIN DE CARRERA

**Comparación de métodos de regularización
aplicados al problema inverso en
electrocardiografía**

Autor: David Jiménez Ramírez

Tutor: Felipe Alonso Atienza

Curso académico 2014/2015

Agradecimientos

Después de tanto tiempo peleando por llegar a este punto, quisiera agradecer a todas las personas que han creído en mí, que me han animado y dado su apoyo durante el desarrollo de este proyecto y de la propia carrera, familiares, amigos, compañeros de trabajo...

Agradezco especialmente a mis amigos de la carrera su compañía, sus ánimos y su ayuda durante todos estos años que hemos estado juntos. Gracias a ellos el camino para llegar hasta aquí ha sido mucho más sencillo y mucho más divertido. Patri, Javi, Javi Castillo, Juancar, Dani, Moli... ahora que cada uno vamos tomando nuestro propio camino, se os va a echar en falta, aunque seguiremos viéndonos y echándonos unas risas siempre que podamos.

Me gustaría agradecer también en especial a mi tutor, Felipe, por todo el apoyo y los ánimos que me ha dado en el transcurso del mismo, por toda la confianza que ha depositado en mí y por la paciencia que ha tenido que tener.

Por último y más importante, me gustaría agradecer a mi familia que siempre esté ahí para apoyarme y para aconsejarme, sin ellos nada de esto hubiera sido posible, sobre todo gracias a mis padres, Pedro y Susana, a los que quiero mucho.

¡Muchas gracias a todos!

Índice general

RESUMEN.....	IX
ABREVIATURAS.....	XI
ÍNDICE DE FIGURAS.....	XIII
ÍNDICE DE TABLAS.....	XV
1 INTRODUCCIÓN.....	1
1.1 ESTADO DEL ARTE	1
1.2 MOTIVACIÓN	3
1.3 OBJETIVOS.....	3
1.4 ESTRUCTURA DE LA MEMORIA.....	4
2 ELECTROFISIOLOGÍA CARDIACA, MODELADO Y PROBLEMA INVERSO.....	5
2.1 ELECTROFISIOLOGÍA CARDIACA	5
2.1.1 <i>El sistema circulatorio</i>	5
2.1.2 <i>Anatomía del corazón</i>	6
2.1.4 <i>Propagación del impulso eléctrico</i>	9
2.1.5 <i>Ciclo cardiaco</i>	10
2.1.6 <i>El electrocardiograma</i>	11
2.1.7 <i>Arritmias cardíacas</i>	15
2.2 MODELADO CARDIACO	16
2.2.1 <i>Problema directo</i>	16
2.2.2 <i>Relación entre potenciales</i>	17
2.3 PROBLEMA INVERSO	18
2.3.1 <i>Regularización</i>	18
3 MATERIAL Y MÉTODOS.....	21
3.1 MODELOS ANATÓMICOS	21
3.1.1 <i>Modelo geométrico</i>	21
3.1.2 <i>Modelo de datos</i>	23
3.2 TÉCNICAS DE REGULARIZACIÓN	24
3.2.1 <i>Tikhonov</i>	24
3.2.2 <i>Tikhonov SVD</i>	25
3.2.3 <i>Dumped SVD</i>	27
3.2.4 <i>Truncated SVD</i>	27

3.2.5	<i>Truncated Total Least Squares</i>	28
3.2.6	<i>Curva-L</i>	28
3.3	HERRAMIENTAS Y MÉTODOS COMPARATIVOS.....	31
3.3.1	<i>Regularization Tools</i>	31
3.3.2	<i>Error relativo</i>	32
3.3.3	<i>Correlación</i>	32
4	RESULTADOS.....	33
4.1	RITMO NORMAL.....	34
4.1.1	<i>Error relativo vs SNR</i>	34
4.1.2	<i>Correlación vs SNR</i>	35
4.1.3	<i>Curva-L vs SNR</i>	36
4.1.4	<i>Error relativo vs Electrodos</i>	37
4.1.5	<i>Correlación vs Electrodos</i>	38
4.1.6	<i>Curva-L vs Electrodos</i>	39
4.2	RITMO 50% ROTOR Y 50% NORMAL.....	39
4.2.1	<i>Error relativo vs SNR</i>	40
4.2.2	<i>Correlación vs SNR</i>	40
4.2.3	<i>Error relativo vs Electrodos</i>	41
4.2.4	<i>Correlación vs Electrodos</i>	42
4.3	RITMO 80% FIBRILACIÓN AURICULAR Y 20% ROTOR	43
4.3.1	<i>Error vs SNR</i>	43
4.3.2	<i>Correlación vs SNR</i>	44
4.3.3	<i>Error vs Electrodos</i>	45
4.3.4	<i>Correlación vs Electrodos</i>	46
4.4	ANÁLISIS COMPARATIVO	47
5	CONCLUSIONES.....	49
	ANEXO I: IMPLEMENTACIÓN	LXIX
	ANEXO II: TABLAS DE ERROR Y CORRELACIÓN	LXXV
	BIBLIOGRAFÍA	LXXXI

Resumen

Las enfermedades cardiovasculares son la principal causa de mortalidad en una de cada tres personas. Además, este tipo de enfermedades tienen un gran impacto social y económico, teniendo un gasto sanitario que supera a cualquier otra enfermedad debido a su complejo análisis. Las enfermedades cardiovasculares se ven reflejadas en arritmias, que impiden la correcta propagación de la señal de naturaleza eléctrica que, en condiciones normales, recorre el corazón de forma periódica y secuencialmente ordenada y hace que éste bombee adecuadamente la sangre. El electrocardiograma permite el estudio de las arritmias más simples pero es incapaz de detectar las que son más complejas, para las cuales es necesario el uso de mapas de la actividad eléctrica del corazón, que permiten describir detalladamente las características espacio-temporales de las arritmias, sin embargo, se basan en procedimientos invasivos, que son muy costosos.

En la última década se han propuesto técnicas no invasivas para obtener mapas de la actividad eléctrica cardiaca, basadas en el análisis de señales eléctricas registradas sobre el torso del paciente. A estas técnicas se les denomina electrocardiografía no invasiva, y combinan un alto nivel de procesado de señal con el uso de características bioeléctricas del torso del paciente. La electrocardiografía no invasiva se constituye como un problema inverso, denominado problema inverso en electrocardiografía, y su método de resolución presenta grandes retos tecnológicos debido a su formulación general y a su mal condicionamiento. Para su resolución se utilizan un gran número de técnicas de regularización, buscando una solución estable y realista, sin embargo, estas técnicas presentan un alcance limitado, ya que se necesita una formulación más específica que incorpore la naturaleza espacio-temporal de la actividad cardiaca para obtener resultados más realistas.

En el presente Proyecto Fin de Carrera se propone la comparación de distintas técnicas de regularización aplicadas sobre diferentes modelos de la actividad eléctrica del corazón, en los que se hacen variar por un lado la potencia de ruido AWGN que tienen las señales a analizar y por otro lado el número de electrodos que se utiliza para obtener las señales. La conclusión a la que se llega en el mismo es que el problema inverso en electrocardiografía es muy complejo de resolver y, actualmente, ninguno de los métodos más utilizados ofrece unos resultados aceptables a pesar de usarse en condiciones casi ideales.

Abreviaturas

PFC: Proyecto Final de Carrera

EC: Enfermedades Cardiovasculares

ECG: Electrocardiograma

FA: Fibrilación auricular

FV: Fibrilación ventricular

EG: Electrograma

PA: Potencial de acción

SA: Sinoauricular

AV: Auriculoventricular

Ppm: Pulsaciones por minuto

BSP: Body Surface Potentials

BSPM: Body Surface Potential Mapping

LS: Least Squares o Mínimos Cuadrados

SVD: Singular Value Decomposition

DSVD: Damped Singular Value Decomposition

TSVD: Truncated Singular Value Decomposition

TTLS: Truncated Total Least Squares

RE: Relative Error

CC: Correlation coefficient

Índice de figuras

- Figura 1: Sistema cardiorespiratorio, 6
- Figura 2: Tejido muscular cardiaco, 7
- Figura 3: Potencial de membrana, 8
- Figura 4: Potencial de acción transmembrana de un miocito, 9
- Figura 5: Nodos y haces, 10
- Figura 6: Fases del ciclo cardiaco, 11
- Figura 7: ECG a partir de los PA, 12
- Figura 8: Derivaciones estándar, 13
- Figura 9: Derivaciones precordiales, 13
- Figura 10. Electrodos utilizando BSPM, 14
- Figura 12: Modelo de esferas, 22
- Figura 13: Ritmo normal, 24
- Figura 14: Ritmo 80 Fibrosis 20 LA, 24
- Figura 15: Ritmo 50 normal 50 LA, 24
- Figura 16: Ajuste para distintos parámetros de regularización, 25
- Figura 17: Representación de la curva-L, 29
- Figura 18: Curvatura de la curva-L, 30
- Figura 19: Error relativo vs SNR en ritmo normal, 34
- Figura 20: Correlación vs SNR en ritmo normal, 35
- Figura 21: Curva-L vs SNR en ritmo normal, 36
- Figura 22: Error relativo vs Electrodos en ritmo normal, 37
- Figura 23: Correlación vs Electrodos en ritmo normal, 38
- Figura 24: Curva-L vs Electrodos en ritmo normal, 39
- Figura 25: Error relativo vs SNR en ritmo 50-50, 40
- Figura 26: Correlación vs SNR en ritmo 50-50, 41
- Figura 27: Error relativo vs Electrodos en ritmo 50-50, 42
- Figura 28: Correlación vs Electrodos en ritmo 50-50, 43
- Figura 29: Error relativo vs SNR en ritmo 80-20, 44
- Figura 30: Correlación vs SNR en ritmo 80-20, 45
- Figura 31: Error relativo vs Electrodos en ritmo 80-20, 46
- Figura 32: Correlación vs Electrodos en ritmo 80-20, 47, 48

Índice de tablas

- Tabla 1: Comparativa del error vs SNR del mejor método por cada ritmo cardiaco, 48
- Tabla 2: Comparativa del error vs tanto por ciento de electrodos del mejor método por cada ritmo cardiaco, 48
- Tabla 3: Comparativa de la correlación vs SNR del mejor método por cada ritmo cardiaco, 48
- Tabla 4: Comparativa de la correlación vs tanto por ciento de electrodos del mejor método por cada ritmo cardiaco, 48
- Tabla 5: Error relativo vs SNR en el caso Normal, LXXV
- Tabla 6: Error relativo vs SNR en el caso 50-50, LXXV
- Tabla 7: Error relativo vs SNR en el caso 80-20, LXXVI
- Tabla 8: Error relativo vs Tanto por cien de electrodos usados en el caso Normal, LXXVI
- Tabla 9: Error relativo vs Tanto por cien de electrodos usados en el caso 50-50, LXXVII
- Tabla 10: Error relativo vs Tanto por cien de electrodos usados en el caso 80-20, LXXVII
- Tabla 11: Correlación vs SNR en el caso Normal, LXXVIII
- Tabla 12: Correlación vs SNR en el caso 50-50, LXXVIII
- Tabla 13: Correlación vs SNR en el caso 80-20, LXXIX
- Tabla 14: Correlación vs Tanto por cien de electrodos utilizados en el caso Normal, LXXIX
- Tabla 15: Correlación vs Tanto por cien de electrodos utilizados en el caso 50-50, LXXX
- Tabla 16: Correlación vs Tanto por cien de electrodos utilizados en el caso 80-20, LXXX

Capítulo 1

Introducción

En este capítulo se introduce la motivación de este PFC, se describen los objetivos del mismo así como la estructura de la memoria.

1.1 Estado del arte

A pesar que desde comienzos del siglo XX surgiera la cardiología como una especialidad, aun hoy día hay muchos factores desconocidos asociados a las causas de mortalidad de las enfermedades cardiovasculares (EC) debido a su complejo análisis. La principal causa de mortalidad en el mundo occidental son las EC y son el principal motivo de fallecimiento de un tercio de la población mundial.

En condiciones normales, existe una señal de naturaleza eléctrica que recorre el corazón de forma periódica y secuencialmente ordenada, que permite un bombeo eficaz de la sangre al resto de organismos del cuerpo. Cuando la periodicidad de la señal eléctrica o su secuencia de propagación se ven alteradas se genera una arritmia. Algunas arritmias se dan en muchas ocasiones en situaciones normales, como pueden ser las bradicardias que se generan mientras se duerme, en cambio, otras son muy peligrosas y pueden poner en peligro la vida de las personas. Las arritmias cardíacas son la principal causa de EC, algunas de ellas son fácilmente detectables, permitiendo controlarlas de manera adecuada, en cambio, otras son muy complejas de detectar. Las arritmias más destacables en el ámbito social son la fibrilación auricular (FA) y la fibrilación ventricular (FV). La FA es la más común y puede degenerar en una enfermedad crónica pero por lo general no es grave si se trata adecuadamente, en cambio, la FV es la

principal causa de muerte súbita, anulando la capacidad de bombeo del corazón y haciendo peligrar seriamente la vida si en un plazo de 3 minutos no se trata.

La principal fuente de información sobre las arritmias es el electrocardiograma (ECG). Con el ECG se puede obtener mucha información de las arritmias pero no es una herramienta lo suficientemente potente como para detectar las arritmias más complejas. Para poder realizar análisis más complejos es necesario tener un conocimiento detallado de la información espacio-temporal de la señal eléctrica que recorre el corazón, para lo que se emplean los mapas de la actividad eléctrica cardiaca, que representan en tres dimensiones información detallada de la señal eléctrica y su evolución en el tiempo. Actualmente los mapas eléctricos cardiacos se obtienen mediante procedimientos invasivos colocando electrodos en el interior del corazón. Estos procedimientos tienen varias limitaciones económicas y sociales que son muy importantes y además es necesario que durante el procedimiento ocurra una arritmia para tener la posibilidad de estudiarla. Para solucionar estos problemas se están buscando otros procedimientos que permitan la generación de mapas cardiacos usando procedimientos sencillos y no invasivos. Estos procedimientos se basan en el registro de la actividad eléctrica en el torso de un paciente utilizando una elevada cantidad de electrodos en comparación a los utilizados en un ECG. Estas señales son conocidas como *Body Surface Potentials* (BSP).

Estos procedimientos no invasivos consisten en la estimación del potencial eléctrico en el corazón a partir del potencial eléctrico en el torso, lo que se puede formular como un problema inverso conocido como el problema inverso en electrocardiología. Haciendo uso de los BSP y de la información anatómica de un paciente, se pretende estimar la actividad eléctrica del corazón sabiendo que el potencial en un punto del torso en un instante de tiempo es la combinación lineal de los potenciales del corazón. A pesar de parecer un problema sencillo tiene una compleja resolución, debido a que es un problema mal condicionado que da lugar a soluciones muy inestables, y a que está mal determinado, ya que el número de valores a estimar es mucho mayor que el número de medidas tomadas.

1.2 Motivación

La principal motivación que ha permitido llevar a cabo este proyecto ha sido la oportunidad de aportar nueva información al tema del problema inverso en electrocardiografía. Hasta la fecha, se han propuesto muchos métodos para la resolución de este problema pero todos tienen un alcance limitado. Por tanto, es necesario el análisis de la capacidad de los métodos actuales y la definición de nuevos métodos que utilicen las características más efectivas, en cuanto a estimación, de los métodos ya existentes para conseguir que sean más efectivos y, que además, utilicen información sobre la manera de comportarse la señal eléctrica cardiaca. Cuando la resolución de este problema esté bien desarrollada se podrá utilizar para ayudar clínicamente a mucha gente simplemente colocándoles una malla con sensores y utilizando la técnica *Body Surface Potentials Mapping* (BSPM), permitiendo estimar correctamente el impulso eléctrico que recorre el corazón sin necesidad de intervenciones quirúrgicas. Esta facilidad para analizar el comportamiento eléctrico del corazón resultará muy útil con pacientes que sufren arritmias, pudiendo vigilarse más detalladamente su estado cardíaco de una manera sencilla y aportando nueva información para su diagnóstico y su control. La correcta resolución del problema inverso en electrocardiografía aportará grandes beneficios en el ámbito social por el riesgo y las consecuencias que tienen las intervenciones quirúrgicas, y en el ámbito económico, por reducir el gran coste que suponen las propias intervenciones, incluso gracias a lo sencillo que resultaría realizar diagnósticos, se podrían detectar anomalías cardíacas en un paciente aparentemente saludable antes de que puedan convertirse en un problema más grave.

1.3 Objetivos

El problema de estimar el potencial en el corazón a partir del potencial en el torso es muy complejo de resolver. Este problema tiene un planteamiento sencillo ya que se puede modelar como un sistema lineal, pero a la hora de resolver la ecuación lineal utilizando métodos simples se obtiene una solución muy subóptima que no tiene absolutamente nada que ver con los valores reales. Para la correcta resolución de este problema hay que recurrir al uso de la regularización, que pone restricciones a la solución para hacer que la estimación esté más definida y se obtengan unos resultados más reales.

En este Proyecto Fin de Carrera se pretende estudiar y comparar entre sí algunas de las soluciones que ya existen para el problema inverso en electrocardiología para conocer la viabilidad de selección de uno u otro método en función del caso concreto proporcionado por el entorno. Los métodos de resolución que se van a estudiar para el problema inverso en electrocardiografía son métodos de regularización que se basan en el método de Tikhonov y en *Singular Value Decomposition*. Se van a utilizar unos modelos muy simples del torso y del corazón además de varios casos de arritmias distintos. Se va a trabajar haciendo variar un parámetro que en algunas ocasiones va a ser la potencia de ruido AWGN añadido a los BSP y en otras ocasiones será el número de electrodos utilizados para la obtención de los BSP.

1.4 Estructura de la memoria

Los capítulos posteriores se estructuran de manera que al principio se explican los conceptos y conocimientos básicos para poder entender el proyecto, posteriormente se explican los métodos y técnicas utilizados, una vez terminada la teoría se va a explicar cómo se ha implementado el código utilizado y finalmente se van a explicar los resultados y las conclusiones a las que se han llegado.

- **Capítulo 2: Estado del arte.** En este capítulo se explican los conceptos básicos que hay que conocer para poder entender este proyecto. Estos conceptos básicos engloban varias temáticas como cardiofisiología, el problema inverso y el problema inverso.
- **Capítulo 3: Herramientas, modelos y métodos.** Este capítulo hace de transición entre la explicación teórica y la práctica explicando con más profundidad cuáles han sido las herramientas, los modelos geométricos, los modelos de datos y los métodos que se han utilizado para la realización de este proyecto y cómo se han utilizado.
- **Capítulo 4: Resultados.** Este capítulo trata sobre los resultados que se han obtenido utilizando cada uno de los métodos y de la comparación entre los mismos. Está dividido en varios casos de ritmos cardiacos y en cada caso se aplican todos los métodos.
- **Capítulo 5: Conclusiones.** El último capítulo explica cuáles han sido las conclusiones a las que se han llegado después de comparar los diferentes métodos y si hay alguna manera de tener un resultado siempre óptimo.

Capítulo 2

Electrofisiología cardiaca, modelado y problema inverso

En este capítulo se explican los conceptos claves que conforman el entorno del PFC como son la electrofisiología cardiaca, el modelado cardiaco y el problema inverso.

2.1 Electrofisiología cardiaca

La electrofisiología cardiaca es la ciencia que se encarga de estudiar el funcionamiento eléctrico del corazón. Se encarga tanto del estudio del corazón en las situaciones normales como en las situaciones patológicas.

2.1.1 El sistema circulatorio

El sistema circulatorio está compuesto por la sangre, las arterias, las venas y el corazón. Por un lado, la sangre se encarga del transporte de los nutrientes para las células y órganos de nuestro cuerpo, y por otro lado, se encarga de transportar los desechos generados por las células para ser eliminados por el riñón y por los pulmones. Las arterias se encargan de transportar la sangre cuando está oxigenada y las venas se encargan de transportarla cuando hay que eliminar los desechos y renovarla.

El corazón es el órgano que se encarga de impulsar la sangre para que recorra todo el sistema circulatorio, funcionando como una bomba electromecánica. Esto significa que gracias a un impulso eléctrico, que se genera en el propio corazón y se

propaga por todas sus células éste, se contrae o se relaja de tal manera que impulsa la sangre por todo el sistema circulatorio.

2.1.2 Anatomía del corazón

El corazón se encuentra entre los pulmones, detrás del esternón y encima del diafragma, tiene un peso aproximado de 250 gramos en las mujeres y de 300 en los hombres y su tamaño es aproximadamente el tamaño del puño cerrado de cada persona. Se divide en dos partes verticales: el lado izquierdo y el lado derecho. El lado izquierdo se encarga de recibir la sangre oxigenada de los pulmones por las venas pulmonares y de impulsarla por la arteria aorta hacia el sistema circulatorio mayor. El lado derecho se encarga de recibir la sangre sin oxígeno por las venas cava y de impulsarla al sistema circulatorio menor a través de las arterias pulmonares para que los pulmones la oxigenen.

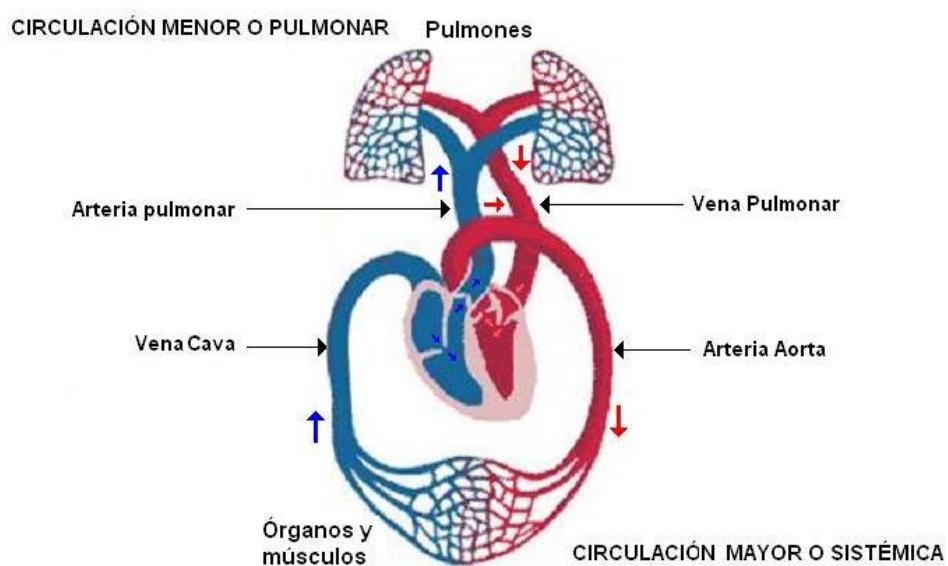


Figura 1: Sistema cardiorrespiratorio. La circulación menor está compuesta por las arterias pulmonares, los pulmones y las venas pulmonares. La circulación mayor está compuesta por la arteria aorta, los órganos y la vena cava.

A su vez, el corazón se divide en dos partes horizontales: las aurículas y los ventrículos. Las aurículas son las partes superiores, encargadas de recoger la sangre que llega por las venas, y los ventrículos son las partes inferiores, encargadas de impulsar la sangre por las arterias. La sangre pasa de las aurículas a los ventrículos y de los ventrículos a las arterias mediante unas válvulas que se abren o se cierran dependiendo

de qué parte del corazón esté relajada o contraída. La forma en la que se propaga el impulso eléctrico hace que primero se contraigan las aurículas, permitiendo el paso de la sangre a los ventrículos, y un momento más tarde el impulso eléctrico hace que se contraigan los ventrículos, bombeando la sangre hacia el sistema circulatorio.

El corazón está compuesto por un tejido muscular llamado miocardio. La parte externa del miocardio se denomina epicardio, que permite mantener sujeto al corazón para que no se desplace de su sitio, lubricándole para que se expanda y contraiga correctamente. La parte interna se llama endocardio y es la que recubre las cavidades del corazón.

En el miocardio podemos encontrar músculos auriculares, músculos ventriculares y fibras musculares excitadoras. Los dos primeros tipos de músculos ocupan la mayor parte y son los que se contraen cuando reciben un impulso eléctrico, mientras que las fibras musculares excitadoras se encargan de facilitar la propagación del impulso. El miocardio está compuesto por unas células especiales llamadas miocitos que no están en ningún otro tejido muscular del cuerpo. Los miocitos están colocados longitudinalmente, formando alargadas fibras musculares que están unidas entre sí lateralmente facilitando la propagación del impulso eléctrico en la dirección de su eje. En el corazón se puede apreciar que el tejido muscular de las aurículas es ligeramente distinto que el de los ventrículos, permitiendo de este modo que los ventrículos tengan un poco más de retardo a la hora de contraerse que las aurículas.

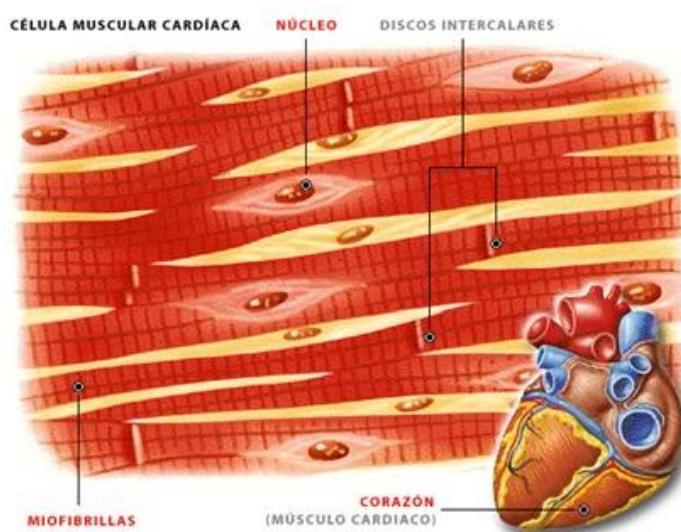


Figura 2: Tejido muscular cardíaco. Representa de manera esquemática cómo es el tejido muscular cardíaco.

2.1.3 Potencial de acción

Las células musculares cardiacas están envueltas por la membrana plasmática, que controla de manera muy selectiva el intercambio de sustancias, iones y moléculas del exterior al interior de la célula. La diferencia de iones que hay dentro y fuera de las células hace que aparezca una diferencia de potencial entre la parte externa y la parte interna de la célula. La propagación del impulso eléctrico por el corazón se debe al cambio de dicho potencial eléctrico de sus células. En el exterior de la membrana se encuentran altas cantidades de sodio (Na^+), un poco más bajas de cloro (Cl^-) y muy bajas de potasio (K^+), mientras que en el interior sucede lo contrario (figura 4). A la diferencia de potencial entre el interior y el exterior de la membrana, que es negativa, se le denomina potencial de membrana [10].

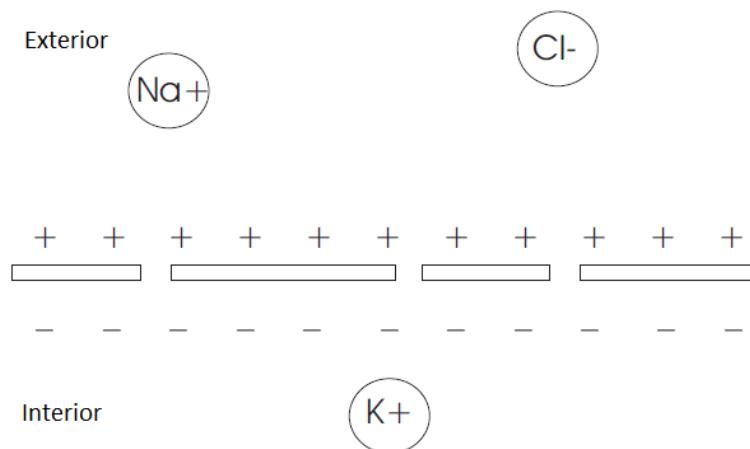


Figura 3: Potencial de membrana. El exterior de la membrana contiene altas cantidades de iones de sodio (Na^+), en menor medida de Cloro (Cl^-) y muy pocas de potasio (K^+), mientras que el interior contiene una gran cantidad de iones de potasio y muy pocas de sodio y cloro.

Si no hay ninguna influencia eléctrica que afecte a la célula, la membrana tiene un potencial de reposo de aproximadamente -90 mV. El potencial de reposo se debe a los iones de potasio, a los de sodio y a la bomba sodio-potasio, que se encarga de mantener la concentración de iones a ambos lados de la membrana celular permitiendo que la diferencia de potencial eléctrico de la célula se mantenga al mismo valor. Cuando hay una influencia eléctrica externa aparece un potencial de acción, que ocurre cuando hay una diferencia de potencial mayor que un determinado umbral. Cuando esto sucede,

la célula permite pasar a los iones de sodio y de calcio, descompensándose el potencial hasta que la célula se vuelve a compensar y vuelve a recuperar el potencial de reposo. Hay tres fases por las que pasa el potencial desde que la membrana es excitada eléctricamente hasta que recupera su estado inicial:

1. **Fase de reposo:** Es el potencial que presenta la membrana sin influencia eléctrica por la diferencia de potencial que existe entre los iones de sodio, cloro y potasio que hay a cada lado de la membrana.
2. **Fase de despolarización:** Los iones de sodio y calcio se meten en el interior de la membrana debido a la excitación externa. En esta fase hay una diferencia de potencial de unos +20 mV.
3. **Fase de repolarización:** Durante un par de décimas de segundo, los iones de potasio salen al exterior de la membrana y hay un intercambio entre los iones de potasio y de sodio gracias a la bomba sodio-potasio, que permite que dos iones de potasio entren dentro de la célula a cambio de que tres iones de sodio salgan de ella, recuperando así su estado inicial.

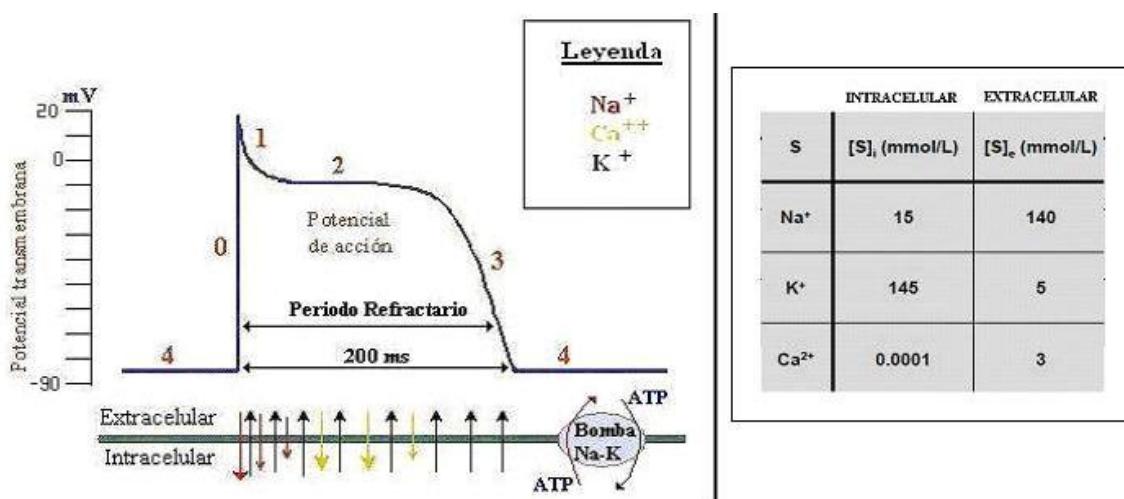


Figura 4: Potencial de acción transmembrana de un miocito. A la izquierda se puede ver cómo varía el potencial de membrana y cómo es el intercambio de iones. A la derecha se observa la concentración de iones en estado de reposo. Las fases 0,1 y 2 corresponden con la despolarización, la fase 3 con la repolarización y la fase 4 con el potencial de reposo.

2.1.4 Propagación del impulso eléctrico

Al haber en una célula un potencial de acción, este potencial se convierte en el que estimula a las células vecinas, consiguiendo con este proceso propagar el impulso eléctrico por todo el músculo cardiaco. Es importante tener en cuenta que una célula no

puede volver a ser excitada hasta que no se haya repolarizado, lo que se conoce como periodo refractario y que aparece representado en la figura 4. Al hecho de que el potencial de acción se propague de unos miocitos a otros se le denomina impulso muscular debido a que tiene el efecto de que los músculos cardiacos se contraigan.

El potencial de acción se origina en el nodo sinoauricular (SA), que es un pequeño tejido fibroso autoexcitable situado en la pared superior de la aurícula derecha y hace la función de marcapasos. El impulso eléctrico se propaga a través de las aurículas por el Haz de Bachmann, haciendo que las aurículas se contraigan. También se propaga por las vías internodales hasta llegar a la parte inferior de la aurícula derecha donde se encuentra el nodo auriculoventricular (AV). El nodo AV es el encargado de pasar el impulso eléctrico de las aurículas a los ventrículos introduciendo un pequeño retardo en su propagación para permitiendo a los ventrículos que se terminen de llenar de sangre. Del nodo AV, el impulso eléctrico va por el Haz de His, y éste se divide en varias ramas denominadas fibras de Purkinje, que es lo que provoca que los ventrículos se contraigan síncronamente.

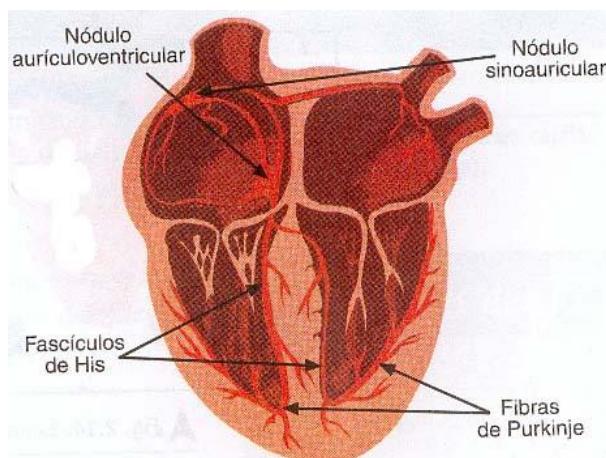


Figura 5: Nodos y haces. Representación de las zonas principales por donde se propaga el impulso eléctrico

2.1.5 Ciclo cardiaco

El ciclo cardiaco es el periodo de tiempo comprendido entre dos latidos del corazón. Al ciclo cardiaco también se le llama pulsación y el corazón suele latir a una velocidad entre 60 y 100 ppm en situaciones de reposo y a unas 200 ppm al realizar

ejercicio físico intenso. El ciclo cardiaco se puede dividir en dos etapas, cada una de ellas con una diástole o relajación, y una sístole o contracción [7, 8, 9]:

- **Etapa de recepción:** Primeramente tiene lugar la diástole auricular, en la que la sangre pasa a almacenarse en la aurícula al mismo tiempo que se abren las válvulas auriculoventriculares. A continuación tiene aparición la fase de relajación isovolumétrica ventricular, en la que los músculos ventriculares empiezan a relajarse para permitir la recepción de la sangre de las aurículas. Y finalmente llegamos a la fase de diástasis, en la cual los ventrículos terminan completamente relajados, recibiendo la sangre que pasa a través de las aurículas al mismo tiempo que ocurre la sístole auricular.
- **Etapa de expulsión:** Lo primero que sucede es la sístole ventricular, dando lugar a la contracción isovolumétrica de los ventrículos mientras se cierran las válvulas AV y se abren las válvulas semilunares, permitiendo el bombeo de la sangre hacia las arterias. Por último, tiene lugar la diástole ventricular, donde las válvulas semilunares se cierran y los ventrículos empiezan a relajarse y a dilatarse nuevamente para volver a recibir la sangre de las aurículas.

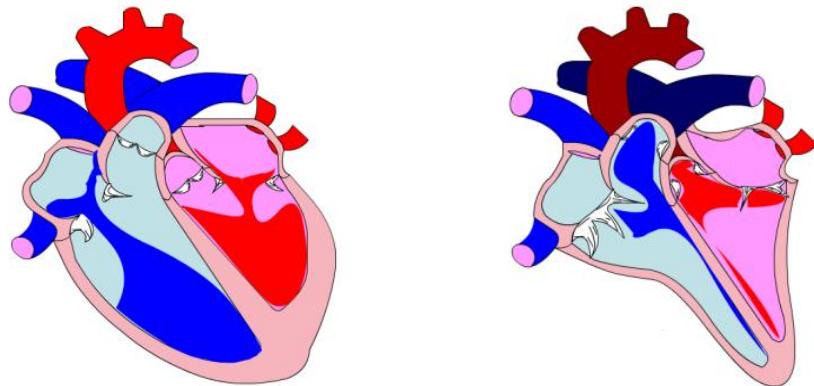


Figura 6: Fases del ciclo cardiaco. A la izquierda la fase de recepción, en la que los ventrículos se encuentran en fase de diástole y las aurículas en sístole. A la derecha la fase de expulsión, en la que los ventrículos se encuentran en fase de sístole y la sangre pasa de los ventrículos a las arterias.

2.1.6 El electrocardiograma

El cambio de potencial en el corazón se ve reflejado como un cambio de potencial en la superficie del torso. El electrocardiograma es el registro del potencial eléctrico en el torso mediante electrodos colocados de manera estándar. Para cada par de células del corazón, la diferencia de potencial eléctrico se puede ver como un dipolo eléctrico, que es un sistema de dos cargas eléctricas de signos opuestos y muy cercanas

entre sí, de tal modo que el campo eléctrico generado por todas las células del corazón se puede calcular como la superposición de todos los dipolos [11].

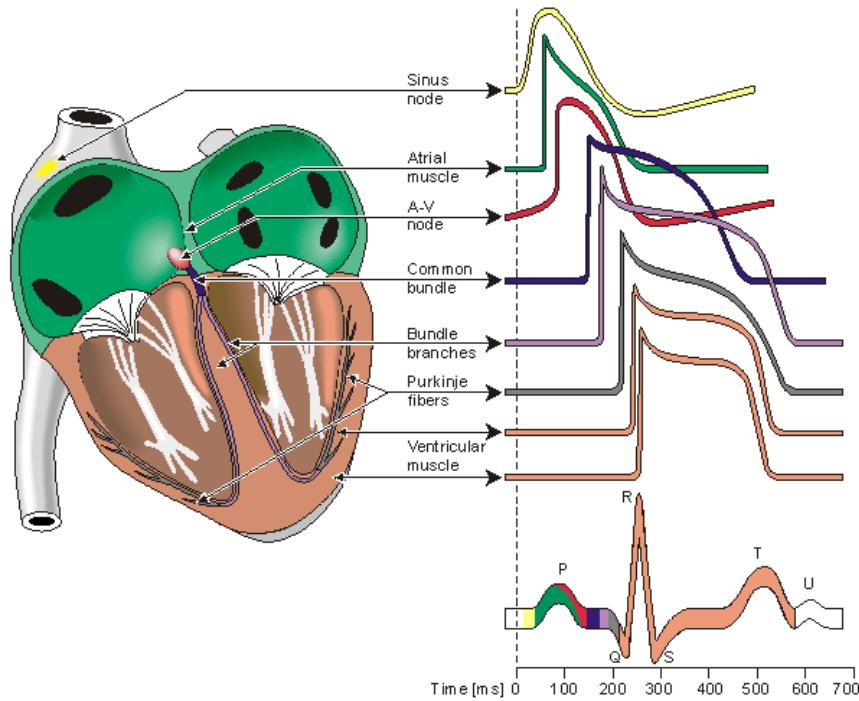


Figura 7: ECG a partir de los PA. Se aprecia que la onda P se debe a la contracción de las aurículas, la QRS a la contracción de los ventrículos y la onda T a la relajación ventricular. Se observa que el potencial de cada célula cardiaca es distinto dependiendo de su localización

Para poder registrar el ECG es necesario medir el potencial que hay entre dos puntos del torso, lo que se conoce como derivaciones. Existen varios tipos de derivaciones, las más básicas son:

- **Derivaciones estándar:** son bipolares, lo que indica que cada medida realizada se toma utilizando dos electrodos, y se obtienen a partir de poner electrodos en el brazo derecho, en el brazo izquierdo y en la pierna izquierda. El valor del ECG sale de proyectar el vector del campo eléctrico generado por el corazón sobre las aristas del triángulo formado por las posiciones donde están los electrodos, denominado triángulo de Einthoven (figura 8). El cambio en el flujo eléctrico de determinadas zonas del corazón se ve reflejado en las derivaciones. Por ejemplo, la derivación I representa el flujo eléctrico de la cara lateral del ventrículo izquierdo [15].

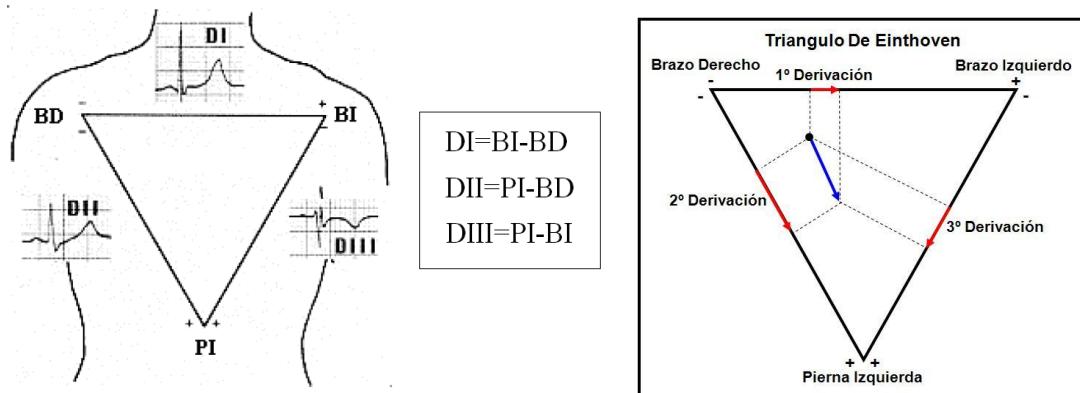


Figura 8: Derivaciones estándar. A la izquierda se aprecia cómo se colocan los electrodos y como se calcula cada derivación. A la derecha se observa cómo se haya el valor de cada derivación a partir del vector del campo eléctrico.

- **Derivaciones aumentadas:** son unipolares, lo que significa que cada medida se realiza utilizando un electrodo en el lugar de medición y otro en un punto de referencia. En el caso de estas derivaciones, se utiliza como electrodo positivo uno de los extremos y como electrodo negativo la media de los otros dos. Este punto de referencia, denominado Central Terminal de Wilson, se encuentra en el baricentro del triángulo de Einthoven, situado en el centro del pecho y por encima del corazón debido a que es un punto de potencial neutro.
- **Derivaciones precordiales:** son unipolares y los registros de los potenciales eléctricos se obtienen a partir de seis puntos del tórax. Estas derivaciones aportan información adicional que no aportan las derivaciones estándar y permiten el estudio de la variación del flujo eléctrico cardiaco en distintos planos.

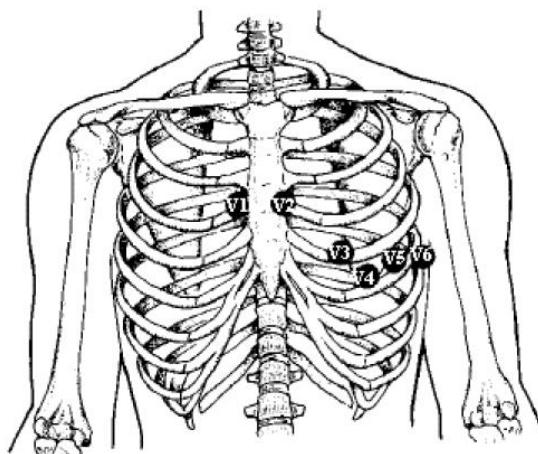


Figura 9: Derivaciones precordiales. Se muestra en qué puntos del tórax se toman las mediciones con el electrodo positivo.

Existe también lo que se conoce como *Body Surface Potential Mapping*, un método de medición en el que se coloca una malla en el torso con hasta 250 electrodos, una cantidad bastante mayor que los 12 electrodos que como máximo se suelen utilizar en las derivaciones clásicas. El método del BSPM, además de proporcionar más información que las derivaciones tradicionales por tener más mediciones, permite tanto la representación de curvas de nivel sobre el torso aplicando escalas de colores como las variaciones temporales de dichas curvas, por lo que puede obtenerse información más detallada sobre en qué parte del corazón puede existir un problema. A pesar de que con el ECG se puede obtener la información clave sobre la existencia de algún problema cardíaco básico, para arritmias no básicas son necesarios unos análisis y estudios más complejos, existiendo la necesidad de medir directamente el potencial eléctrico en el corazón realizando una intervención quirúrgica. Haciendo uso del BSPM se pretende sustituir el método para medir el potencial directamente en el corazón por un método para estimar dicho potencial, problema que no podría resolverse mediante los datos obtenidos de las derivaciones tradicionales, ya que para una correcta estimación son necesarias una gran cantidad de medidas y la manera en la que varían.

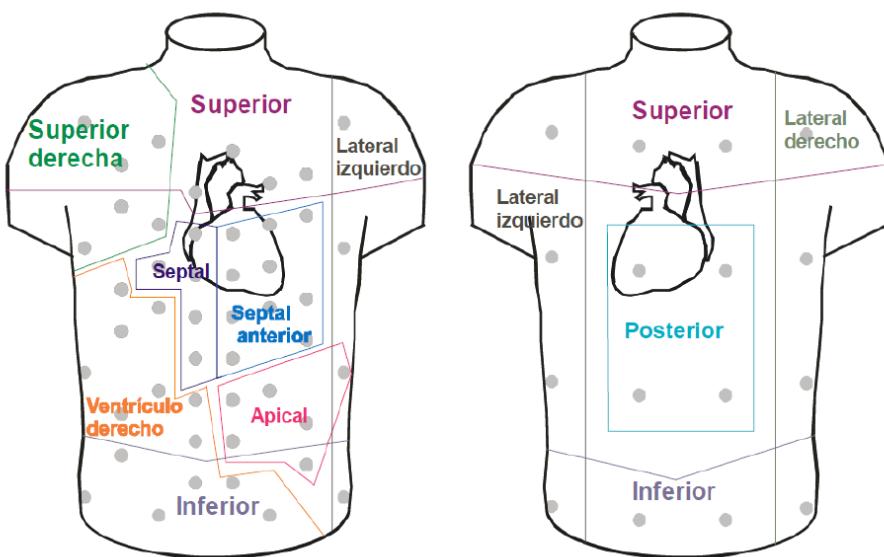


Figura 10. Electrodos utilizando BSPM. Se observa la correspondencia entre potenciales del corazón y los potenciales de la superficie del torso.

2.1.7 Arritmias cardiacas

Pueden existir múltiples causas por las que el corazón no funcione correctamente, siendo la mayoría de ellas debidas a un fallo en la conducción eléctrica del mismo. Hay muchos tipos de trastornos cardiacos, la mayor parte relacionados con arritmias. Algunos pueden suceder durante un pequeño periodo de tiempo sin tener importancia, mientras que otros pueden tener consecuencias tan graves que pueden llegar a la muerte. A continuación se explican algunos ejemplos de arritmias cardiacas [14, 15].

Las arritmias son trastornos que cambian el ritmo cardíaco y tienen que ver con una alteración o una interrupción en la excitación que produce el nodo SA. Si la frecuencia cardíaca en reposo es mayor de 100 ppm se habla de taquicardia y si es menor de 60 ppm se habla de bradicardia. Una arritmia normal es la que se conoce como arritmia sinusal respiratoria, que consiste en la disminución del tiempo entre latidos al inspirar, pero el tiempo del complejo PQRST se mantiene más o menos constante. Por otro lado, una arritmia que por lo general es simple pero que puede llegar ser grave es la fibrilación auricular. En este caso, las células de las aurículas se activan aleatoriamente y por tanto los músculos no se contraen sincrónamente. Se presenta por medio de una taquicardia debido al continuo excitamiento sobre el nodo SA y en el ECG se refleja como muchas ondas sin ninguna característica específica. Por lo general no es grave, ya que solo dificulta un poco el traspaso de sangre de las aurículas a los ventrículos, pero se puede complicar, llegando a aumentar las pulsaciones hasta 350 ppm. También existe la fibrilación ventricular, esta arritmia es mucho más grave que la fibrilación auricular debido a que en este caso la fibrilación no permite que los ventrículos bombean la sangre adecuadamente por el sistema circulatorio teniendo efectos mortales si no se corrige en menos de cinco minutos.

Otro motivo por el que puede existir una arritmia es porque el impulso eléctrico no sigue el camino adecuado. Este tipo de arritmias puede implicar que el corazón no se contraiga de manera correcta debido a que el impulso no se propaga por todo el corazón o a que exista una falta de sincronismo. Un caso práctico de esta situación es la existencia de una reentrada del impulso eléctrico generado por el nodo SA, esto quiere decir que el impulso eléctrico no termina después de recorrer el corazón y por lo tanto se propaga indefinidamente por el mismo. Para que esto suceda, una de las zonas de conducción tiene que estar bloqueada, por ejemplo, a causa de una cicatriz, de modo

que el impulso eléctrico se divide en varios impulsos que rodean la zona bloqueada. Una vez que el impulso se ha dividido pueden suceder varias cosas: por un lado, es posible que uno de los impulsos se retrase, volviendo a excitar a las células cardíacas una vez pasado el periodo refractario, la otra opción disponible es que el impulso recorra circularmente la zona sin conducción, volviendo a propagarse por las células del principio de la zona afectada y repitiéndose el proceso.

A parte de los tipos de trastornos ya mencionados, pueden existir otros trastornos que no se deben al mal funcionamiento del impulso eléctrico, como ocurre cuando hay un problema hemodinámico. Un infarto es un claro ejemplo de este tipo de problema cardíaco, producido por la falta de riego sanguíneo al corazón debido a que las arterias coronarias, que son las que proporcionan el oxígeno al corazón, están obstruidas. Con el ECG se pueden detectar isquemias, que indican una disminución transitoria o permanente del riego sanguíneo cuando la onda T aparece invertida, o infartos si las ondas Q son negativas y presentan una determinada forma tanto en un ciclo cardíaco como a lo largo del tiempo.

2.2 Modelado cardíaco

Una vez explicada la parte de electrofisiología cardíaca se van a explicar las bases matemáticas necesarias para poder relacionar el potencial eléctrico que hay en el epicardio con el potencial eléctrico en el torso y viceversa. La explicación matemática, además de ayudar a obtener una mejor comprensión del funcionamiento del corazón, va a fijar las bases para la búsqueda de nuevas soluciones que simplifiquen los métodos ya existentes a la hora de realizar diagnósticos cardíacos. La relación entre los potenciales eléctricos del corazón y del torso se divide en dos modelos cardíacos distintos: el modelo directo y el inverso.

2.2.1 Problema directo

El problema directo trata de dar solución al problema de conocer cómo se distribuyen los potenciales eléctricos en una superficie sabiendo cómo son las fuentes eléctricas en el corazón [11, 16]. Esta superficie puede ser tanto la del propio corazón como la del torso del cuerpo. Es un problema relativamente sencillo una vez que se conocen los datos ya que está bien condicionado, lo que indica que pequeñas

variaciones en los datos producen pequeñas variaciones en los resultados, y posee una única solución. Lo complejo del problema directo consiste en conocer cuál es la relación entre las fuentes cardíacas y los potenciales en la superficie, ya que para ello hay que tener en cuenta cómo es la anatomía y las propiedades físicas del modelo con el que se trabaja. Una vez que se conoce cuál es la relación entre los potenciales de las fuentes y los de la superficie a analizar es más sencillo saber cómo varían los potenciales por dicha superficie sabiendo cuando las fuentes del corazón no están funcionando correctamente. A pesar de que este campo está bastante avanzado y es muy útil a la hora de diagnosticar arritmias simples y de ayudar a mejorar y a controlar el estado de los pacientes con alguna cardiopatía, aun se pueden obtener mejoras en estos aspectos que simplifiquen aun más los métodos utilizados o que ayude a la detección de arritmias más complejas.

2.2.2 Relación entre potenciales

El planteamiento matemático del problema directo se puede modelar con la ecuación matricial

$$y = Ax$$

En la que si fijamos un instante de tiempo:

- x es el vector de longitud N_x que contiene los valores del potencial eléctrico de las fuentes eléctricas del corazón.
- y es el vector de longitud N_y que contiene los valores del potencial eléctrico en el torso o en la superficie del corazón.
- A es la matriz de transferencia de dimensiones $[N_y, N_x]$ y describe la relación entre las fuentes eléctricas cardíacas y los potenciales eléctricos del torso.

En el caso de trabajar con varios instantes temporales los vectores x e y pasarían a ser matrices de dimensiones $[N_x, N_t]$ y $[N_y, N_t]$ respectivamente.

La relación de los potenciales eléctricos entre el torso y las fuentes cardíacas no tiene un valor fijo, si no que depende de la anatomía específica y de las características eléctricas de cada cuerpo. Esta relación de potenciales eléctricos funciona de manera que si se considera un vector de potenciales unitarios en el corazón donde solo el potencial del nodo i está activo, entonces la columna i de la matriz de transferencia representa los potenciales medidos en el torso.

2.3 Problema inverso

El problema inverso trata de solucionar el saber cómo son y cómo funcionan las fuentes eléctricas del corazón conociendo el potencial eléctrico que hay en una superficie que englobe a las fuentes, que en este caso es la superficie del torso o la superficie del corazón. El planteamiento matemático para la resolución de este problema hace uso de la ecuación matricial del problema directo calculando x en lugar de y ($x = A^{-1}y$). Sin embargo, este problema de mínimos cuadrados, al contrario que el problema directo, es muy complejo de resolver debido a su mal condicionamiento, que implica que una pequeña variación en los datos tiene grandes variaciones sobre el resultado de la estimación, por lo que a la hora de realizar operaciones matemáticas es muy probable que se obtengan varios resultados distintos en función de cómo se apliquen dichas operaciones. El problema inverso también es complejo debido a que existen múltiples resultados de fuentes eléctricas para una misma distribución de potenciales en una superficie y a que el número de fuentes en el corazón es mucho mayor que el número de medidas que se hacen en la superficie, lo que se conoce como un sistema *overdetermined* o sobredeterminado. Al igual que en el problema directo, para la solución del problema inverso también hay que tener en cuenta la anatomía y las propiedades físicas del cuerpo sobre el que se trabaja, ya que estas variables afectan a la relación entre las fuentes y la distribución de los potenciales, por ello, en este aspecto se utiliza la información disponible del problema directo. Este proyecto se va a centrar en el estudio de este problema y por tanto las explicaciones posteriores se van a centrar en la explicación del problema inverso.

2.3.1 Regularización

La regularización surge debido al mal condicionamiento de problemas como es el problema inverso. Para comprender mejor qué es un problema mal condicionado se propone el siguiente ejemplo [19]:

Sean las siguientes matrices partes de una ecuación, de tal modo que se cumple la igualdad $y = Ax$:

$$A = \begin{pmatrix} 0.16 & 0.10 \\ 0.17 & 0.11 \\ 2.02 & 1.29 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0.26 \\ 0.28 \\ 3.31 \end{pmatrix} \quad y \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Se supone que no se conoce el valor de x y se quiere estimar sabiendo los valores de A y de y . Para ello se utiliza el método de mínimos cuadrados planteando la solución como $\text{Arg}_x \min \|y - Ax\|_2$ debido a que la matriz A no es cuadrada y no se puede calcular su inversa.

A continuación se añade al valor de y un pequeño ruido de valor:

$$n = \begin{pmatrix} 0.01 \\ -0.03 \\ 0.02 \end{pmatrix}$$

Al calcular x con el método de mínimos cuadrados se obtiene el resultado:

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} 7.01 \\ -8.40 \end{pmatrix}$$

Esta solución difiere mucho de la que se tenía originalmente que era $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Se puede apreciar que la norma de la solución utilizando mínimos cuadrados es mucho mayor que la norma de la solución real. Para solventar esto se puede poner una restricción en la norma. Ahora el planteamiento para resolver el problema es el siguiente:

$$\text{Arg}_x \min \|y - Ax\|_2 \text{ tal que } \|x\|_2 \leq \alpha$$

Las soluciones utilizando los valores de α igual a 0.1, 1, 1.385 y 10 son:

$$\hat{x}_{0.1} = \begin{pmatrix} 0.08 \\ 0.05 \end{pmatrix} \quad \hat{x}_1 = \begin{pmatrix} 0.84 \\ 0.54 \end{pmatrix} \quad \hat{x}_{1.385} = \begin{pmatrix} 1.17 \\ 0.74 \end{pmatrix} \quad \hat{x}_{10} = \begin{pmatrix} 6.51 \\ -7.60 \end{pmatrix}$$

Se puede ver que con el valor de α igual a 1.385 el resultado de la estimación es mucho más parecido al original que el resultado utilizando LS sin la restricción.

En este tipo de situaciones, el principal problema que se tiene es que existen muchas soluciones al problema y la matriz A se dice que está mal condicionada porque la mayoría de sus autovalores son nulos o se aproximan a serlo. Esto causa que una pequeña variación en el valor de la matriz y varíe mucho el valor de la matriz x . Para solucionar este problema lo que se hace es añadir restricciones (como la que se ha añadido en el ejemplo limitando el valor del módulo).

A esta adición de condiciones que permiten obtener un resultado parecido al real se le denomina regularización.

Capítulo 3

Material y métodos

En este capítulo se explican cuál es el modelo que simula la actividad eléctrica del corazón, las técnicas de regularización y las herramientas de comparación que se han usado para la realización de este PFC además de cómo se han utilizado.

3.1 Modelos anatómicos

En este apartado se explica el modelo geométrico que ha sido utilizado para la resolución del problema inverso en este proyecto, así como los distintos conjuntos de datos que han sido empleados sobre dicho modelo.

3.1.1 Modelo geométrico

El modelo geométrico es algo muy importante y muy a tener en cuenta para la resolución del problema inverso debido a que hay que tener clara la relación que va a existir entre los potenciales eléctricos generados por las fuentes cardiacas y los potenciales eléctricos de la superficie con la que se trabaja. Debido a la complejidad del problema inverso, se ha trabajado con un modelo muy simple para prestar toda la atención en la propia resolución del problema de estimación, de modo que este modelo servirá para establecer las bases sobre la resolución del problema inverso.

El modelo empleado ha sido proporcionado por varios investigadores de la Universidad Politécnica de Valencia. El comportamiento entre el corazón y el torso es simulado mediante un modelo de esferas concéntricas formadas a partir de triángulos.

El corazón se identifica con la esfera de menor radio, que es de 5 unidades, y el torso se identifica con la esfera de mayor tamaño, que tiene un radio de 15 unidades.

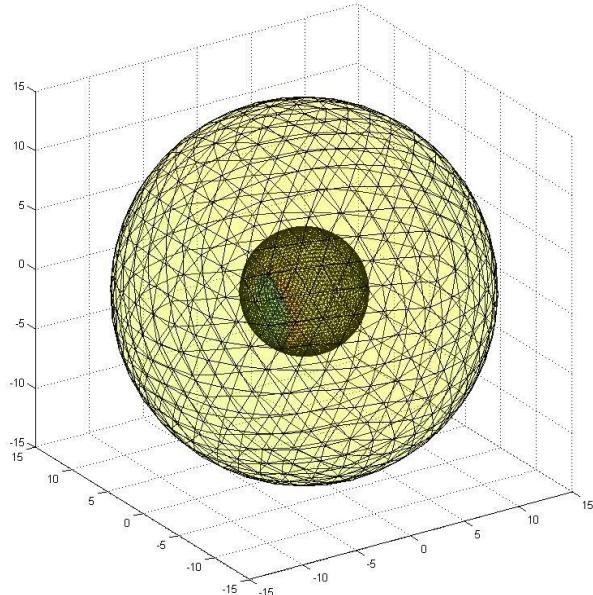


Figura 12: Modelo de esferas. Se representa el modelo de esferas utilizado donde la esfera de menor tamaño representa el corazón y la esfera de mayor tamaño representa el torso.

Este modelo geométrico está dividido en dos variables:

- **Modelo_EG:** Corresponde a la esfera más pequeña y representa la superficie cardiaca, que es donde se mide el electrograma, es decir, el potencial eléctrico generado por un conjunto de fuentes eléctricas sobre la superficie del corazón.
- **Modelo_ECG:** Esta variable corresponde a la esfera de mayor tamaño y representa la superficie del torso. Esta superficie es sobre la que se mide el ECG.

Cada una de las variables posee tres campos que son *faces*, *vertices* y *vnorm*. El campo *faces* contiene los vértices de cada triángulo, *vertices* representa la posición de cada uno de los vértices y *vnorm* es el vector normal a cada uno de los triángulos.

Como se comparan y se representan los resultados obtenidos de la resolución del problema inverso, se ha hecho un uso importante de la variable **Modelo_EG** para visualizar los datos en 3D.

3.1.2 Modelo de datos

El modelo de datos empleado para la realización de este proyecto es fundamental ya que los cálculos y las conclusiones a las que se llegan dependen totalmente de estos datos. Del mismo modo que el modelo geométrico, estos datos han sido proporcionados por la Universidad Politécnica de Valencia.

Las variables utilizadas para la realización de los cálculos y las comparativas entre distintos métodos son:

- y : matriz de dimensiones $[N_y, N_t]$ que contiene el valor de la variación de los potenciales en el torso. N_y es el número de electrodos en el torso y N_t el número de instantes medidos.
- x : matriz de dimensiones $[N_x, N_t]$ que contiene el valor de la variación de los potenciales en el epicardio. N_x es el número de electrodos en el epicardio y N_t el número de instantes medidos.
- A : matriz de tamaño $[N_y, N_x]$ que depende del modelo geométrico utilizado ya que relaciona los valores de la variable x con los de la variable y .

Estas variables cumplen la ecuación matricial del problema directo $y = Ax$.

Al mismo tiempo, han sido empleados varios conjuntos de datos correspondientes a distintos ritmos cardiacos con el objetivo de comparar los diferentes métodos aplicados a algunas posibles circunstancias cardiacas. Se han utilizado los siguientes ritmos cardiacos:

- **Ritmo normal:** la generación y propagación del impulso eléctrico es correcta y la frecuencia cardiaca tiene un valor normal en reposo, es decir, unas 70 ppm (figura 13).
- **Ritmo 80 fibrosis 20 LA:** en este caso el 80% del epicardio se ve reflejado por una fibrosis, por lo que en esta área habrá fibrilación, y en el 20% restante el pulso eléctrico se propaga de manera rotativa (Left Atria). A este ritmo se le referenciará como ritmo o caso 80-20 (figura 14).
- **Ritmo 50 normal 50 LA:** se comporta de forma que en el 50% del epicardio la conducción es normal y en el otro 50% el pulso eléctrico se propaga como un rotor. A este ritmo se le referenciará como ritmo o caso 50-50 (figura 15).

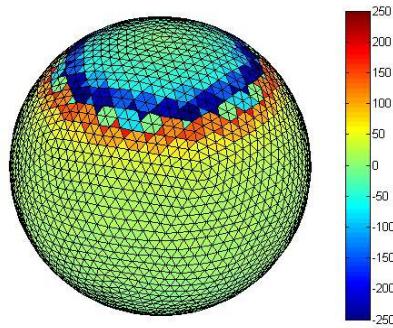


Figura 13: Ritmo normal. Representación del ritmo normal. El pulso eléctrico se propaga en dirección vertical y descendiente.

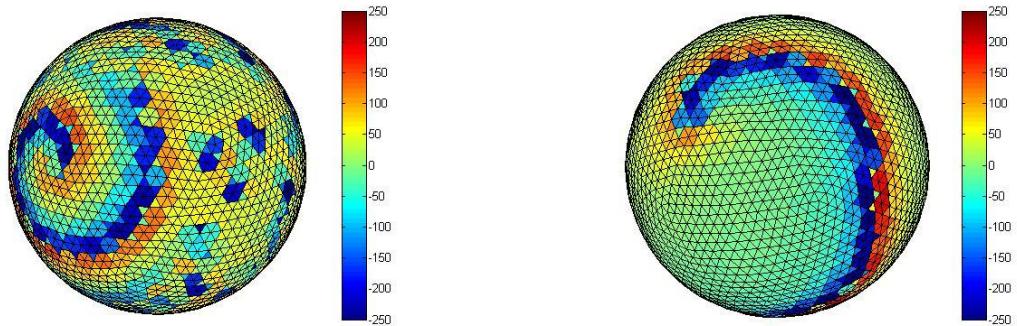


Figura 14: Ritmo 80 Fibrosis 20 LA. Representación del ritmo cardíaco con fibrilación y rotacional con la proporción espacial 80% y 20% respectivamente.

Figura 15: Ritmo 50 normal 50 LA. Representación del ritmo cardíaco con propagación rotacional en la mitad del espacio.

3.2 Técnicas de regularización

En esta sección se cuenta qué técnicas de regularización han sido empleadas y su explicación matemática de manera básica.

3.2.1 Tikhonov

La técnica de regularización Tikhonov es la más popular para la resolución del problema inverso ya que es el método más representativo dentro de los métodos de regularización que utilizan restricciones sobre la ecuación a resolver y gran parte de los métodos de regularización se basan en él.

La manera en la que este método aborda el problema inverso es utilizando una modificación del método LS que consiste en añadir una restricción a la norma de la solución mediante un parámetro.

El planteamiento que utiliza Tikhonov se refleja en la ecuación

$$\operatorname{Arg}_x \min (\|y - Ax\|_2^2 + \lambda^2 \|Lx\|_2^2)$$

donde L es el operador de regularización y λ es el parámetro de regularización. El operador L es una matriz que suele considerarse identidad I , en cuyo caso se dice que es orden 0, aunque también se trabaja con las matrices gradiente y laplaciano, en cuyos casos se habla de orden 1 o de orden 2 respectivamente. El método que se ha utilizado en este proyecto ha sido Tikhonov orden 0 por ser el más básico.

En este caso el valor de $\|Lx\|_2^2$ viene condicionado por el valor de λ de manera que a un valor mayor de λ el valor de $\|Lx\|_2^2$ disminuye.

La solución a este problema viene dada por la ecuación:

$$x_\lambda = (A^T A + \lambda^2 L^T L)^{-1} A^T y$$

El valor del parámetro de regularización tiene que ser elegido de manera cuidadosa ya que si se escoge un valor muy grande la solución obtenida se convierte en un sub-ajuste de la solución real, mientras que si se escoge un valor demasiado pequeño se convierte en un sobre-ajuste y oscila demasiado (figura 16).

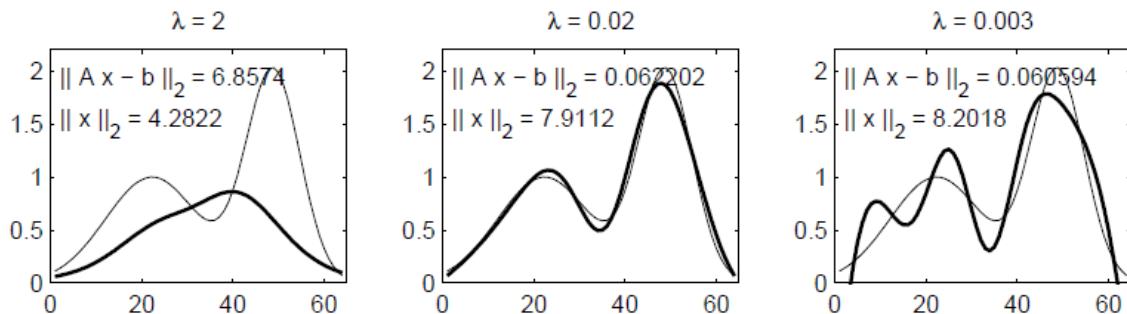


Figura 16: Ajuste para distintos parámetros de regularización. Se representa la solución obtenida para un problema concreto utilizando distintos valores del parámetro de regularización. La figura de la izquierda corresponde con un caso sub-ajustado, la figura central se corresponde con un correcto valor del parámetro de regularización y la figura de la derecha se corresponde con un caso sobre-ajustado.

3.2.2 Tikhonov SVD

Este método es el resultado de aplicar Tikhonov después de realizar la descomposición en valores singulares de la matriz A .

La técnica SVD permite la factorización de una matriz por medio de tres matrices relacionadas mediante sus autovalores y autovectores con la matriz original. La factorización de la matriz A va a permitir una mejor comprensión, un mejor manejo de los métodos de regularización y de la elección más adecuada del valor del parámetro de regularización.

El resultado de aplicar SVD sobre la matriz A es:

$$A = \sum_{i=1}^n u_i \sigma_i v_i^T$$

donde u_i y v_i son vectores ortonormales y los valores singulares σ_i son números positivos ordenadas en orden decreciente de la forma

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$$

Dado que se está trabajando con el problema inverso, la matriz A va a tener unos valores singulares muy próximos a cero debido a su mal condicionamiento.

Incluyendo el método SVD aplicado a la matriz A en la ecuación de la resolución de Tikhonov se obtiene la formulación matemática

$$x_\lambda = \sum_{i=1}^n f_i \frac{u_i^T y}{\sigma_i} v_i$$

donde f_1, \dots, f_n son los factores del filtro de Tikhonov que toman el valor

$$f_i = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \lambda^2} \cong \begin{cases} 1, & \sigma_i \gg \lambda \\ \sigma_i^2 / \lambda^2, & \sigma_i \ll \lambda \end{cases}$$

El parámetro de regularización hace de valor base para filtrar sobre los valores singulares. Escogiendo un valor adecuado apenas se va a dar importancia a los valores singulares muy próximos a cero y se van a tener muy en cuenta los valores más altos.

A partir de la aplicación del método SVD se pueden sacar los valores de $\|x_\lambda\|_2^2$ y de $\|y - Ax_\lambda\|_2^2$. Estos valores van a ser utilizados para sacar el valor más apropiado para el parámetro de regularización y son

$$\|x_\lambda\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \left(f_i \frac{u_i^T y}{\sigma_i} \right)^2$$

$$\|Ax_\lambda - y\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \left((1 - f_i) u_i^T y \right)^2$$

3.2.3 Dumped SVD

Esta regularización es muy similar a la regularización Tikhonov SVD con la diferencia de que los factores del filtro en DSVD tienen el valor

$$f_i = \frac{\sigma_i}{\sigma_i + \lambda}$$

Los factores del filtro de DSVD en comparación con los de Tikhonov SVD caen más lentamente por lo que la solución está menos filtrada.

3.2.4 Truncated SVD

La regularización conocida como Truncated SVD funciona del mismo modo que Tikhonov SVD pero en este caso al utilizar SVD sobre la matriz A se toman como valores singulares no nulos los k primeros.

$$A_k = \sum_{i=1}^k u_i \sigma_i v_i^T$$

siendo $k \leq n$.

La solución a este problema viene dada por

$$x_k = \sum_{i=1}^k \frac{u_i^T y}{\sigma_i} v_i$$

donde en esta solución en comparación con la solución de Tikhonov SVD se obtiene que los factores del filtro tienen el valor

$$f_i = \begin{cases} 1, & \sigma_i \geq \sigma_k \\ 0, & \sigma_i < \sigma_k \end{cases}$$

La función que realiza este filtro es la de seleccionar un umbral que indica a partir de qué valor singular dejan de tenerse en cuenta el resto de valores singulares.

3.2.5 Truncated Total Least Squares

La regularización Truncated TLS se basa en la descomposición en valores singulares de (A, y) , matriz extendida formada por la matriz A y el vector y . Esta es una gran diferencia con respecto el resto de regularizaciones porque para la realización de los cálculos hay que hacerlos instante a instante y no matricialmente como puede hacerse con el resto de métodos.

Para la resolución de esta técnica aplicamos SVD a la matriz (A, y) :

$$(A, y) = \bar{U} \bar{\Sigma} \bar{V}^T = \sum_{i=1}^{n+1} \bar{u}_i \bar{\sigma}_i \bar{v}_i^T$$

Se divide la matriz \bar{V} de dimensiones $[n+1, n+1]$ en cuatro submatrices de la forma

$$\bar{V} = \begin{pmatrix} \bar{V}_{11} & \bar{V}_{12} \\ \bar{V}_{21} & \bar{V}_{22} \end{pmatrix}$$

siendo \bar{V}_{11} una matriz de dimensiones $[n, k]$, \bar{V}_{12} otra matriz de dimensiones $[n, q]$, \bar{V}_{21} una matriz de dimensiones $[1, k]$ y \bar{V}_{22} una matriz de dimensiones $[1, q]$.

El siguiente paso es la selección de un valor de k de modo que se cumplan las siguientes condiciones:

$$k \leq \min(n, \text{rank}(A, y))$$

$$\bar{\sigma}_k > \bar{\sigma}_{k+1}$$

$$\bar{V}_{22} \equiv (v_{n+1, k+1}, \dots, v_{n+1, n+1}) \neq 0$$

Una vez que se ha aplicado el método SVD a la matriz (A, y) y que se ha elegido el valor de k podemos obtener la estimación mediante la ecuación

$$\bar{x}_k = -\bar{V}_{12} \bar{V}_{22}^* = -\bar{V}_{12} \bar{V}_{22}^T \|\bar{V}_{22}\|_2^{-2}$$

donde el símbolo $*$ indica que es la matriz pseudoinversa.

3.2.6 Curva-L

La curva-L es la representación de la norma de la solución de la regularización en contraposición a la norma residual siendo el eje de ordenadas $\log_{10} \|x_{est}\|_2$ y el eje de abscisas $\log_{10} \|Ax_{est} - y\|_2$. Es una herramienta gráfica muy utilizada para seleccionar el valor del parámetro de regularización debido a que permite elegir entre el tamaño de la solución regularizada y el parecido entre las muestras medidas.

En prácticamente todos los métodos de regularización es necesario hacer una elección entre el tamaño de la solución y el parecido con las muestras medidas y utilizadas como datos.

El significado que tiene la curva-L es la comparación del error que se produce en las regularizaciones. Por un lado, debido al hecho de que el problema inverso es complejo de resolver y se trabaja con una matriz mal condicionada, la resolución del problema introduce errores por la discretización de las medidas realizadas obteniendo una solución de tamaño muy grande. Por otro lado, las regularizaciones tratan de corregir este problema, pero hay que tener precaución a la hora de aplicarlas ya que una regularización demasiado agresiva da como resultados unos valores que no se corresponden con los valores medidos a la hora de calcularlos utilizando el método directo calculado mediante la expresión $y = Ax$.

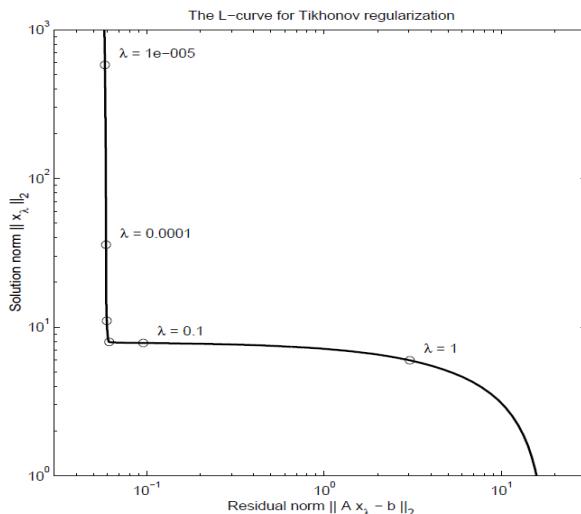


Figura 17: Representación de la curva-L. Se aprecia la relación que existe entre el tamaño de la solución regularizada y la norma residual. El nombre de la curva se debe a que esta relación tiene forma de L.

El objetivo de la curva-L es el de proporcionar una ayuda para la elección más idónea del parámetro de regularización de modo que la regularización elimine el error cometido por la discretización de las mediciones pero no añada error debido a las limitaciones impuestas modificando el problema inicial.

Debido a la forma de L que tiene la curva, se puede deducir de manera sencilla que el parámetro de regularización óptimo a utilizar es el valor que da como resultado la

esquina de la L, o dicho de otro modo, es el valor que da un mayor cambio de curvatura ya que este punto es el que representa el equilibrio entre ambos tipos de errores.

Una vez que se tiene la representación de la curva-L y la función por la que está representada podemos obtener qué punto tiene el mayor cambio de curvatura para poder determinar el valor óptimo del parámetro de regularización. El valor de la curvatura se puede obtener mediante la expresión matemática

$$K = \frac{\rho' \eta'' - \rho'' \eta'}{((\rho')^2 + (\eta')^2)^{3/2}}$$

siendo los términos η y ρ

$$\eta = \log_{10} \|x_{est}\|_2$$

$$\rho = \log_{10} \|Ax_{est} - b\|_2$$

y siendo η' , ρ' , η'' y ρ'' las primeras y segundas derivadas de las funciones η y ρ .

Una vez obtenido el valor de la curvatura máxima para cada valor del parámetro de regularización, se puede ver dónde se encuentra dicho valor. El valor del parámetro de regularización asociado a este máximo es el valor óptimo y el que coincide con la esquina de la curva-L.

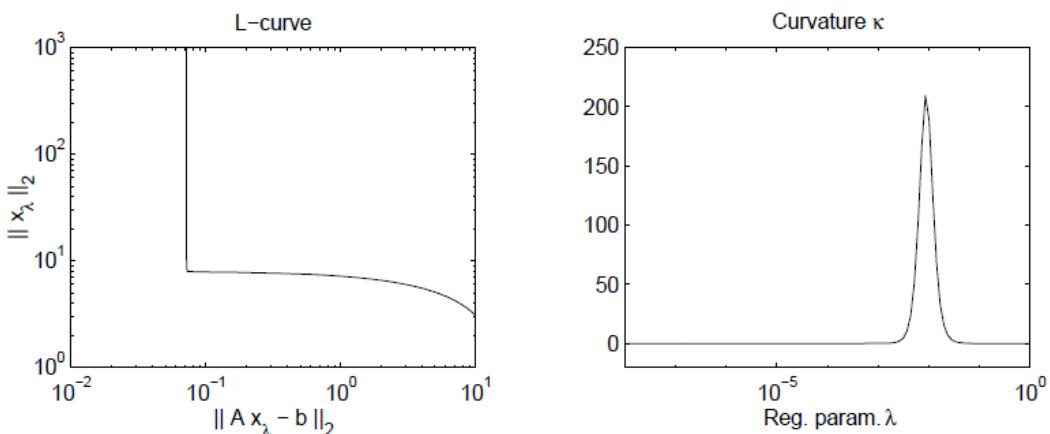


Figura 18: Curvatura de la curva-L. Se observa la variación del valor en la curvatura de la curva-L en función del valor del parámetro de regularización escogido. El valor óptimo es el que coincide con la máxima curvatura.

3.3 Herramientas y métodos comparativos

En este apartado se explican qué herramientas y métodos estadísticos se han utilizado para comprobar la calidad de los resultados obtenidos después de aplicar las regularizaciones.

3.3.1 Regularization Tools

Para la resolución del problema inverso y para la comparación con los algoritmos desarrollados en este proyecto se ha hecho uso de un paquete de funciones utilizado por el software científico MATLAB llamado *Regularization Tools*. Este paquete contiene las funciones de regularización necesarias para analizar y solucionar problemas mal condicionados. *Regularization Tools* está desarrollado por Per Christian Hansen de la Universidad Técnica de Dinamarca. El manual de este paquete y el propio paquete pueden descargarse de la página web de la Universidad Técnica de Dinamarca [21]. La versión del paquete que ha sido utilizada es la 4.1 y la versión de MATLAB mínima requerida para utilizarlo es la 7.3.

Regularization Tools contiene funciones que se pueden agrupar en:

- Funciones que utilizan los métodos SVD y GSVD
- Funciones que hacen uso de algoritmos iterativos
- Funciones útiles utilizadas por los métodos de resolución
- Funciones orientadas al análisis
- Funciones que generan datos de algunos problemas específicos
- Funciones de transformación de problemas
- Funciones auxiliares

Dentro de todos estos grupos de funciones, las que han sido utilizadas para la realización de este proyecto han sido:

- Funciones que utilizan los algoritmos SVD y GSVD: *tikhonov*, *Dumped SVD (dsvd)*, *Truncated SVD (tsvd)* y *Truncated Total Least Squares (ttls)*.
- Funciones útiles dentro del propio paquete: *Compact SVD (csvd)* para calcular de manera simplificada SVD y *get_l* para obtener la matriz *L* usada en las regularizaciones.

- Funciones utilizadas para análisis. *L_curve* para calcular la curva-L, pintarla y calcular su *corner*, *l_corner* para localizar el *corner* de una curva-L y *plot_lc* para representar la curva-L.

3.3.2 Error relativo

El error relativo es una medida estadística entre dos series de datos en la cual el objetivo es medir el parecido entre ambas hablando en términos de magnitud. Una de las series de datos se coge como referencia.

La expresión matemática para calcular el error relativo es

$$RE = \frac{\|x - \hat{x}\|_2}{\|x\|_2}$$

donde x representa a los datos reales y \hat{x} es la referencia y \hat{x} es el resultado de la estimación.

El valor del error relativo refleja la diferencia de magnitud entre ambas series de datos siendo un valor de error relativo N cuando la magnitud de la serie de datos estimada es $N+1$ veces más grande que la referencia.

3.3.3 Correlación

La correlación es una medida estadística que mide el parecido que hay entre dos series de datos en cuanto a la manera en la que ambas series varían. Dicho de otro modo, cuando una de las series de datos es creciente, la correlación mide si la otra serie de datos en ese mismo rango también es creciente, si es independiente a la primera, o si es decreciente siempre que la primera es creciente.

La expresión para calcular la correlación es

$$CC = \frac{x^T \hat{x}}{\|x\|_2 \|\hat{x}\|_2}$$

donde x representa a los datos reales y \hat{x} es el resultado de la estimación.

El valor devuelto por la estimación varía entre los valores 1 y -1 siendo la correlación 1 cuando la variación es idéntica, -1 cuando la variación es la contraria y 0 si la variación de una de las series de datos no tiene ninguna relación con la otra.

Capítulo 4

Resultados

En este capítulo se explican los resultados obtenidos después de aplicar las técnicas de regularización Tikhonov, Tikhonov SVD, DSVD, TSVD y TTLS a los distintos casos de estudio ya mencionados.

Se realizan dos tipos de análisis:

- La resolución de las técnicas de regularización y la elección del parámetro de regularización apropiado mediante la curva-L variando el valor de la SNR y el número de electrodos utilizados en el torso.
- Las prestaciones máximas que se obtienen al utilizar cada método, para lo que se ha hecho uso de los valores reales de la superficie cardiaca con el fin de minimizar el error de la estimación con los datos reales, y es lo que se ha llamado caso óptimo. Estas estimaciones solo sirven para ver los mejores resultados que se pueden obtener, ya que la manera de calcularlas no serviría en una situación real.

Los resultados obtenidos se han cuantificado comparando las estimaciones realizadas con los valores reales haciendo uso del RE y del CC, permitiendo observar en qué casos se comporta mejor un método que otro y bajo qué circunstancias particulares.

Los valores elegidos de SNR (dB) son 1000 y 100 para simular situaciones ideales; 60 y 30 para ver el comportamiento en situaciones bastante buenas; y 10, 6 y 3 para situaciones realistas. Por otro lado, los electrodos usados han sido los porcentajes 100 %, 80 %, 60 %, 50 %, 40 % y 20 % con respecto del número total de electrodos, que corresponden a 642, 513, 385, 321 256 y 128 electrodos. Para los cálculos realizados al variar el número de electrodos se ha utilizado un valor de SNR de 100.

4.1 Ritmo normal

En este primer apartado se estudia el caso normal, ya explicado en el punto 2.1.3 del capítulo 3. Este ritmo va a ser la referencia para la comparación con el resto de casos por ser el más sencillo, ya que el pulso eléctrico se genera correctamente a un ritmo normal de aproximadamente 70 ppm y no se simulan situaciones patológicas.

4.1.1 Error relativo vs SNR

Como se aprecia en la figura 19, todos los métodos de regularización tienen un comportamiento similar exceptuando algún punto particular. Los puntos que se salen del comportamiento común se deben a una incorrecta elección del parámetro de regularización utilizando la curva-L por la complejidad de detectar la esquina en esos casos particulares. El comportamiento esperado es que el error de la estimación aumente a medida que disminuye la SNR, y esto se cumple para la mayoría de los puntos.

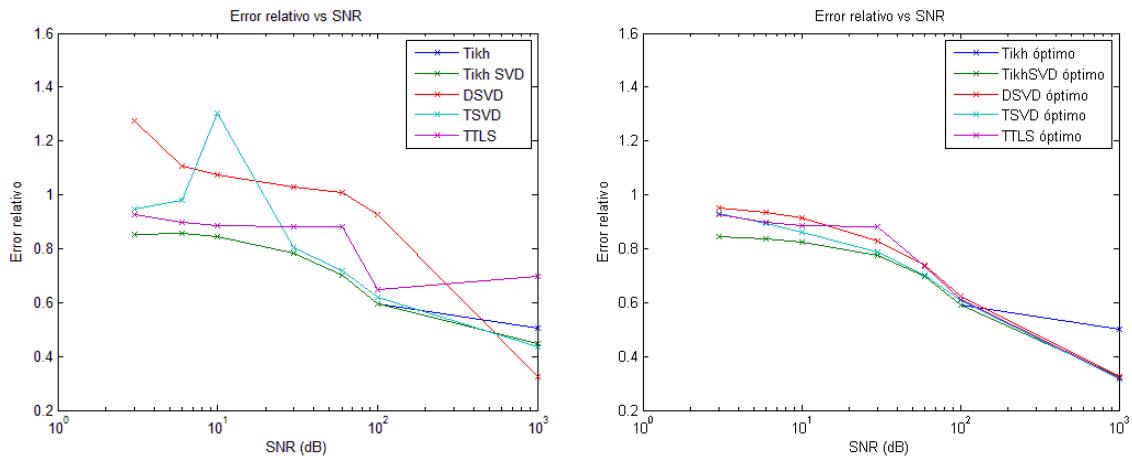


Figura 19: Error relativo vs SNR en ritmo normal. La figura de la izquierda representa el error de las estimaciones calculadas. La figura de la derecha representa el error de las mejores estimaciones posibles obtenidas a partir de los datos reales.

Los métodos que mejor error relativo tienen son Tikhonov y Tikhonov SVD, con unos valores de error entre 0.4 en el mejor caso y 0.8 en el peor. Después de estos dos métodos van TSVD y TTLS, donde TSVD para valores de SNR mayores que 30 dBs se comporta de forma muy similar a Tikhonov y con TTLS se comete un error relativo que varía entre 0.65 y 0.9. Para valores de SNR menores de 30 dBs, TTLS se mantiene en un valor de 0.9, mientras que TSVD tiene peores prestaciones, estando su error en un valor medio de 1. Por último, el método que peor funciona es DSVD, que tiene un error

medio de 1 a pesar de que para un valor de SNR de 1000 dBs es el método que mejor funciona con un error relativo de 0.4.

En la imagen de la derecha de la figura 19 se aprecia que las mejores estimaciones que se pueden obtener de los diversos métodos son muy similares. A medida que el valor de SNR disminuye se observa una ligera diferencia entre métodos. Se puede apreciar que los métodos que mejor funcionan son Tikhonov y Tikhonov SVD, con un error de aproximadamente 0.85 en el peor caso, seguidos por los métodos TSVD y TTLS con un error de aproximadamente 0.93, y DSVD funciona un poco peor que estos últimos con un error entorno a 0.96.

4.1.2 Correlación vs SNR

Al estudiar la correlación entre las estimaciones y los datos reales se espera que a valores más altos de SNR la correlación sea mayor debido a que se está añadiendo menor error, y a valores bajos de SNR la correlación sea menor. Si se observa la figura 20, se aprecia que esta expectativa se cumple excepto en algunos puntos específicos al igual que ocurre con el error relativo.

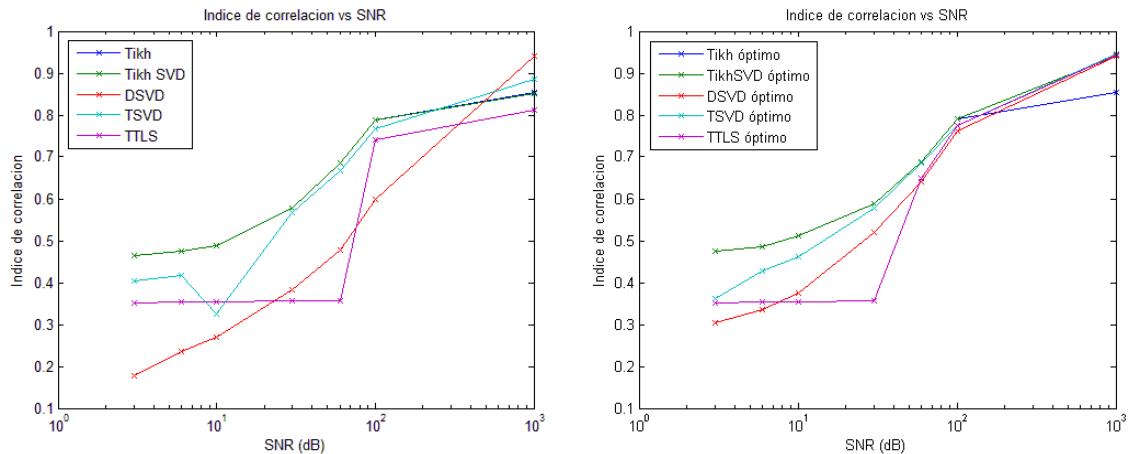


Figura 20: Correlación vs SNR en ritmo normal. La figura de la izquierda representa la correlación de las estimaciones mediante la curva-L. La figura de la derecha representa la correlación de las mejores estimaciones posibles obtenidas a partir de los datos reales.

El comportamiento de las distintas estimaciones en términos de correlación es muy similar al que hay en términos de error relativo. Los métodos con mejor correlación son Tikhonov y Tikhonov SVD, con valores que están entre 0.85 y 0.47. El siguiente mejor método en cuanto a correlación es TSVD, que tiene un comportamiento

muy similar a Tikhonov, con unos valores de correlación entre 0.89 y 0.4. Por último se encuentran los métodos TTLS y DSVD, donde TTLS varía bruscamente de un índice de correlación medio de 0.87 a uno de 0.35 y DSVD varía uniformemente desde un valor de correlación de 0.95 a un valor de 0.2.

Comparando estas correlaciones con las que se obtienen en el caso óptimo, se observa que el comportamiento es muy similar. Todos los métodos, excepto Tikhonov, tienen una correlación máxima de 0.95 y los índices de correlación más bajos para cada uno son 0.48 para Tikhonov y Tikhonov SVD, 0.35 para TSVD y TTLS, y un valor de 0.3 para DSVD.

4.1.3 Curva-L vs SNR

Al observar en la figura 21 cómo varía la curva-L en función del valor de SNR utilizando el método de Tikhonov, se aprecia que la parte de la curva-L que refleja el error en los datos comienza más a la derecha de la gráfica a medida que aumenta el valor de SNR, disminuyendo el rango de valores que representan al error de regularización. Esto quiere decir que a bajos valores de SNR, debido al ruido AWGN que se añade a los datos, ya se introduce una magnitud de error suficientemente grande como para que la norma residual sea pequeña y se pueda obtener una estimación con algún parecido a los datos reales. Este hecho se ve reflejado en un aumento del valor óptimo del parámetro de regularización. Para el resto de regularizaciones y de casos de estudio el comportamiento de la curva-L es el mismo, por lo que en los posteriores apartados no se hará ninguna mención a esto.

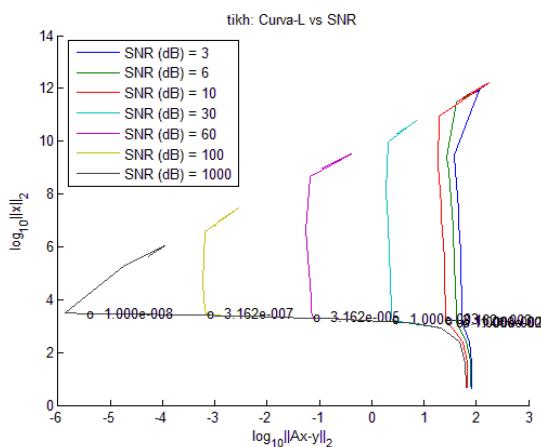


Figura 21: Curva-L vs SNR en ritmo normal. Se representa la curva-L obtenida mediante la aplicación del método Tikhonov usando diferentes valores de SNR.

4.1.4 Error relativo vs Electrodos

Al usar un número de electrodos mayor o igual a 256, que equivale al 40 % del total, el error varía muy poco excepto para DSVD, que es el método que ofrece peor error y el que más oscilaciones tiene, variando su valor entre un error de 0.85 y 1.07. Con TTLS se obtiene un error de aproximadamente 0.68, con TSVD un error de 0.63 y con Tikhonov y Tikhonov SVD se obtienen unos errores en torno a 0.62.

En el caso en el que el número de electrodos es igual a 128 (20 % del total), el error de las estimaciones converge en dos grupos. Por un lado, los métodos con peores prestaciones son TTLS y TSVD con un error de 0.79. El otro grupo, formado por los métodos Tikhonov, Tikhonov SVD y DSVD ofrecen un error de 0.69.

Los errores obtenidos en los casos óptimos son unas centésimas mejores en general. La mayor diferencia se observa con DSVD, donde el error varía entre 0.62 y 0.65, y donde también se aprecia diferencia en el método TSVD, pareciéndose más el error al de Tikhonov que al de TTLS, como ocurría al estimar de manera normal. Comparando el caso ideal con la estimación normal, el error tiene poca variación entre el 100 % y el 40-50 % de los electrodos usados, cantidad a partir de la cual el error se incrementa rápidamente a pesar de que solo varía un máximo de 4 centésimas.

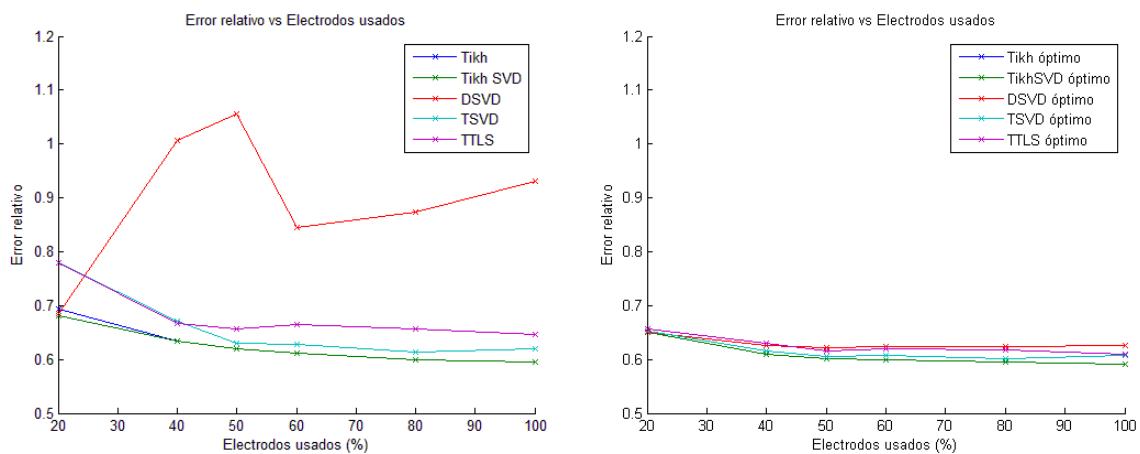


Figura 22: Error relativo vs Electrodos en ritmo normal. A la izquierda se representa el error de las estimaciones haciendo uso de la curva-L. A la derecha se representa el error de las mejores estimaciones posibles a partir de los datos reales.

Hablando en términos de magnitud de error, parece que en este caso concreto no se aprecia un cambio significativo a la hora de utilizar menos electrodos. Este hecho se debe a la gran cantidad de electrodos que se utilizan, al existir mucha redundancia de información se dispone de una mayor precisión a la hora de hacer la estimación. Se empieza a notar un aumento rápido de error al trabajar con menos de 256 electrodos.

4.1.5 Correlación vs Electrodos

Los métodos más robustos a la hora de seleccionar un menor número de nodos son Tikhonov y Tikhonov SVD con unos índices de correlación que varían de 0.78 a 0.71. Por otro lado TSVD, con un valor de 0.76, es el siguiente método que tiene mejores valores de correlación al utilizar más de 256 electrodos (40% del total), siguiéndole TTLS con un valor aproximado de 0.72. Este orden se invierte al utilizar menos del 40% de los electrodos, quedándose TTLS con una correlación de 0.67 y TSVD con 0.57. El peor comportamiento corresponde con el método DSVD, donde el índice de correlación medio es de 0.6 y que está por encima de los demás al usar 128 electrodos (20% del total) con un índice de 0.73.

En el caso de obtener las mejores estimaciones posibles y utilizando la mayoría de los electrodos, el orden de los métodos según su correlación es Tikhonov, Tikhonov SVD, TSVD, TTLS y DSVD, con unos índices de correlación que varían entre 0.76 y 0.79. A la hora de reducir el número de electrodos por debajo de 128 (20% del total) se obtienen unos valores de correlación entre 0.73 y 0.74. En contraposición a lo que ocurría en las estimaciones normales, el método DSVD se comporta ligeramente mejor que los métodos TSVD y TTLS.

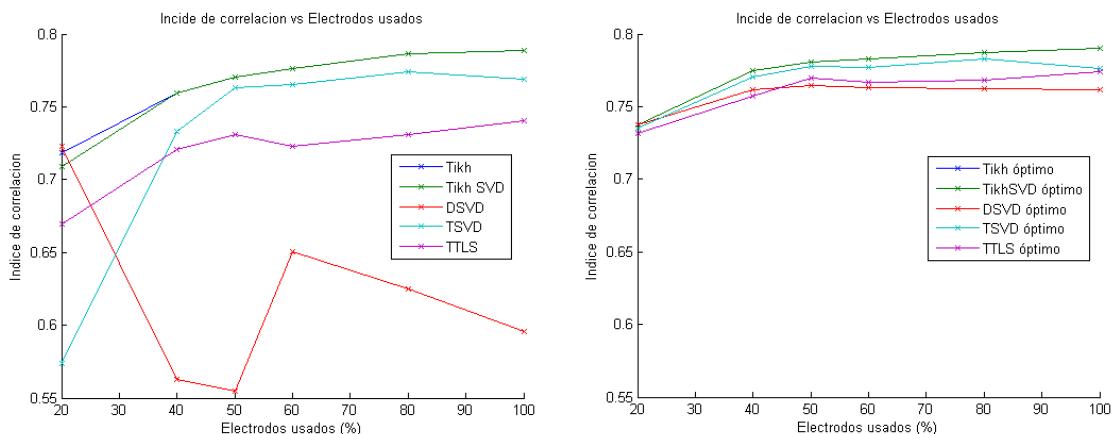


Figura 23: Correlación vs Electrodos en ritmo normal. A la izquierda se representa la correlación con las estimaciones calculadas. A la derecha se representa la correlación de las mejores estimaciones que se pueden obtener.

Del mismo modo que ocurría con el estudio del error, la correlación se mantiene estable para valores de más de 256 electrodos (40% del total). A medida que disminuye el número de electrodos por debajo de 256 la correlación decrece bruscamente aunque sean máximo 4 centésimas de diferencia. Si se sigue disminuyendo el número de electrodos el comportamiento negativo en la correlación se acentúa.

4.1.6 Curva-L vs Electrodos

Como se observa en la figura 24, a medida que disminuye el número de electrodos, la esquina de la curva-L tiende a desplazarse hacia los valores negativos del eje que representa la norma residual. Puede parecer extraño que al disminuir el número de electrodos se obtenga una menor norma residual y por tanto una mejor estimación, pero lo que realmente ocurre es que al modificar la esquina de la curva-L, se está separando la distancia entre el valor del parámetro de regularización elegido mediante el cálculo de la esquina con el que es realmente óptimo, haciendo que realmente la estimación sea un poco peor.

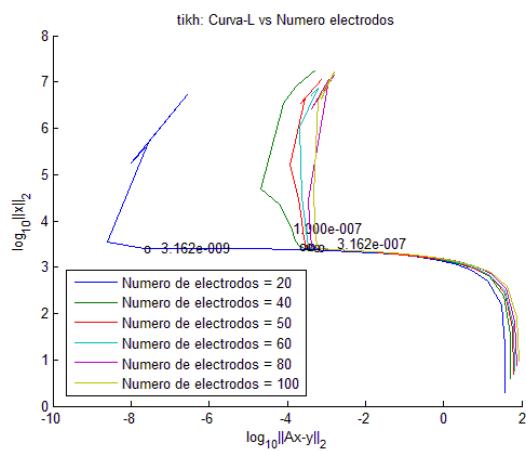


Figura 24: Curva-L vs Electrodos en ritmo normal. Se representa la curva-L en función del número de electrodos utilizados con respecto el total de electrodos para el método Tikhonov.

4.2 Ritmo 50% rotor y 50% normal

Este caso sirve para ver el funcionamiento de los métodos de regularización cuando la señal no es tan básica como en el caso normal y existe un determinado nivel de anomalía en la propagación del impulso eléctrico.

4.2.1 Error relativo vs SNR

Los errores relativos del caso 50-50 en comparación a los del caso normal son muy similares. Al igual que ocurría en el caso normal, todos los métodos funcionan de manera muy similar.

Los métodos que se comportan mejor son Tikhonov y Tikhonov SVD con una variación de error de 0.3 a 0.9. El siguiente mejor método en términos de error es TSVD, cuyo comportamiento en media es muy parecido a Tikhonov SVD. Posteriormente está TTLS, cuya variación de error es más brusca, pasando de un valor de 0.6 a 1 en cuanto se trabaja con SNR menores de 100 dB. Por último, el método DSVD comienza con un error de 0.3 al igual que Tikhonov SVD pero enseguida pasa a valores de error de 0.8 y oscila entre 1 y 1.1 para SNR menores de 100 dB.

En la situación en la que se obtienen las mejores estimaciones, o lo que es lo mismo, en el caso óptimo, todos los métodos tienen un error de 0.3 excepto Tikhonov, que tiene 0.48. El peor error relativo de las distintas técnicas de regularización correspondiente a una SNR de 3 dB varía entre 0.9 y 1. En el caso ideal, el orden de los métodos es el mismo que en el caso de las estimaciones normales excepto que DSVD tiene un error relativo ligeramente inferior a TTLS.

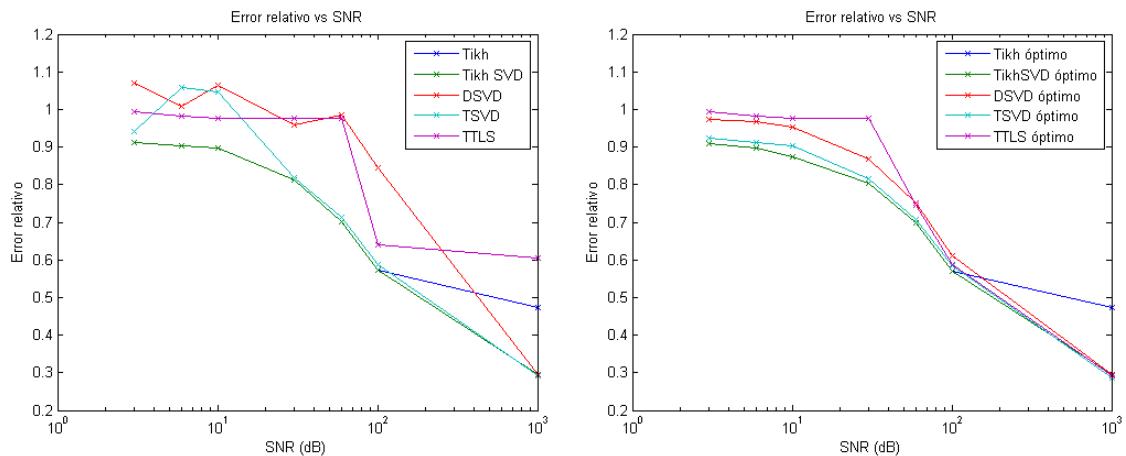


Figura 25: Error relativo vs SNR en ritmo 50-50. A la izquierda se representa el error de las estimaciones calculadas. A la derecha se representa el error de las mejores estimaciones que se pueden obtener.

4.2.2 Correlación vs SNR

Al igual que ocurre con el estudio del error relativo, la correlación del caso 50-50 se asemeja mucho a la correlación del caso normal.

Los métodos de regularización dominantes siguen siendo Tikhonov y Tikhonov SVD con una correlación entre 0.95 y 0.4 (Tikhonov de 0.89 a 0.4), y muy similar a estos métodos se comporta TSVD, con una correlación un par de centésimas menor en media. Los métodos TTLS y DSVD dan correlaciones similares entre sí en media, variando TTLS de 0.8 a 0.2 bruscamente y DSVD variando de 0.95 a 0.18 de manera más progresiva.

Calculando las estimaciones con el parámetro óptimo de regularización que minimiza el error con los datos reales, los resultados son muy similares a las estimaciones calculadas usando la curva-L, con la diferencia de que la mejor correlación de TTLS es 0.95 en lugar de 0.8 y DSVD da unos valores de correlación un poco más altos, variando de 0.95 a 0.23.

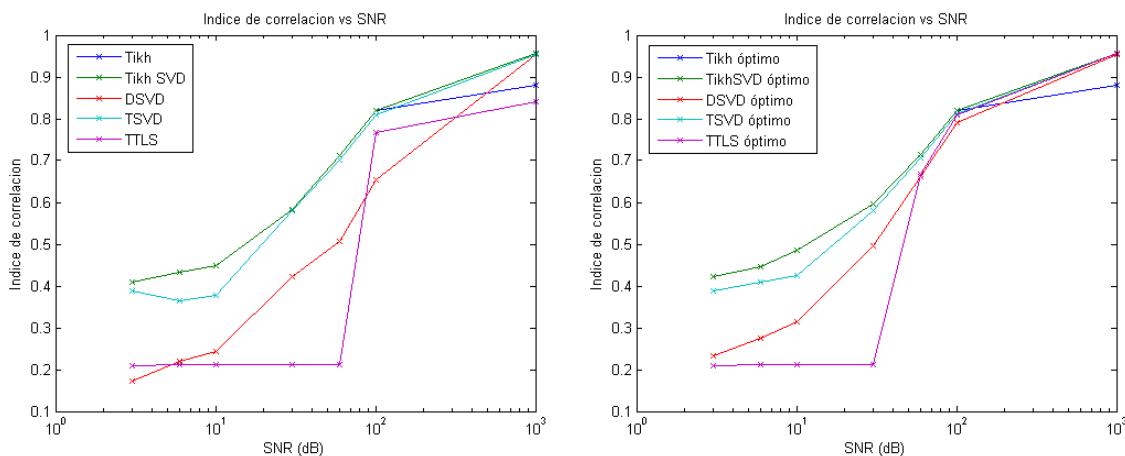


Figura 26: Correlación vs SNR en ritmo 50-50. A la izquierda se representa la correlación de las estimaciones calculadas. A la derecha se representa la correlación de las mejores estimaciones posibles.

4.2.3 Error relativo vs Electrodos

Los resultados del error relativo variando el número de electrodos del caso 50-50 coinciden en gran parte con los resultados del caso normal del mismo modo que ocurre al variar el parámetro de la SNR.

Los métodos Tikhonov y Tikhonov SVD son los que mejor comportamiento tienen con una variación del error relativo de 0.6 a 0.64. Cuando se hace uso de más 256 electrodos (40%), TSVD tiene un error promedio de 0.62 en comparación con TTLS, que tiene un error promedio de 0.67. Al utilizar 128 electrodos (20%), TTLS funciona un poco mejor que TSVD, cuyos errores son 0.71 y 0.79 respectivamente. Por último, DSVD tiene errores muy altos y que oscilan mucho, el promedio es de 0.9

aproximadamente, excepto para el uso del 20% de los electrodos, que es de los métodos con error relativo más bajo con un valor de 0.65.

Los errores relativos mínimos asociados a los casos óptimos que se obtienen son 0.57, 0.57, 0.583, 0.587 y 0.612, correspondientes a los métodos Tikhonov, Tikhonov SVD, TSVD, TTLS y DSVD. Los errores máximos, obtenidos al utilizar 128 electrodos (20%), son aproximadamente 0.644 para TTLS y 0.637 para el resto de métodos. Como es lógico, todos los métodos siguen la tendencia de aumentar el error al utilizar menor cantidad de electrodos, aumentando más rápidamente el error al reducir el número de electrodos a partir de 256 (40% del total).

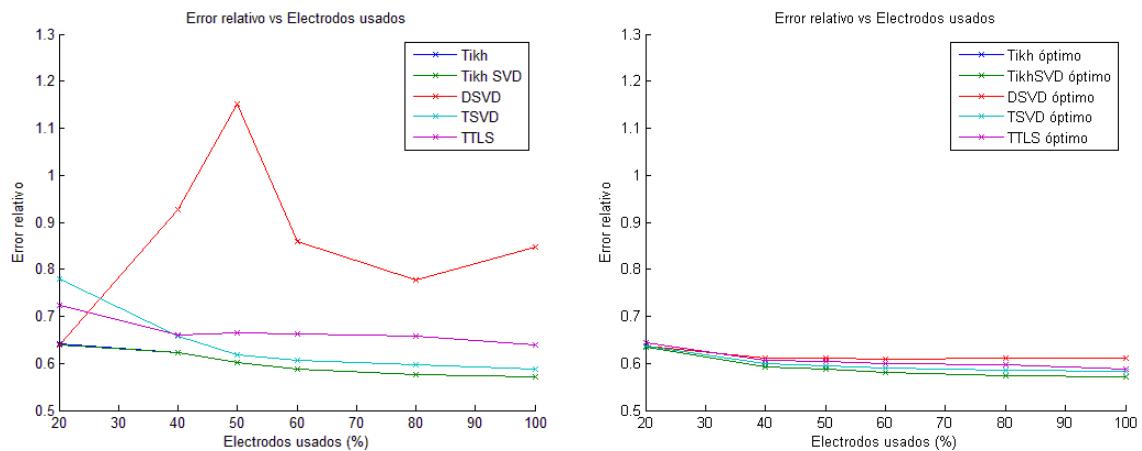


Figura 27: Error relativo vs Electrodos en ritmo 50-50. A la izquierda se representa el error de las estimaciones calculadas con los distintos métodos. A la derecha se representa el error de las mejores estimaciones posibles.

4.2.4 Correlación vs Electrodos

El parecido de los resultados entre el caso normal y este caso también se ve reflejado en los resultados de la correlación.

Una vez más Tikhonov y Tikhonov SVD son los métodos que ofrecen una mejor correlación, con unos valores que varían de 0.84 a 0.76 en el peor de los casos. También sigue estando la distinción entre TSVD y TTLS al utilizar más de 256 electrodos (40%), siendo la variación de la correlación para TSVD de 0.82 a 0.76 y para TTLS de 0.76 a 0.75 aproximadamente. Al utilizar 128 electrodos (20%) TTLS tiene una correlación de 0.72 y TSVD de 0.62. El método que peores prestaciones de correlación ofrece es DSVD, con un valor medio de 0.6 pero con una correlación de 0.76 si se utilizan 128 electrodos, que son el 20% del total.

En el análisis de las estimaciones óptimas que se pueden obtener, el orden de los métodos con mejor correlación es Tikhonov, Tikhonov SVD, TSVD, TTLS y DSVD con unas correlaciones máximas entre 0.79 y 0.82. En el peor caso de todos, usando 128 electrodos (20% del total), la correlación para todos los métodos es de 0.77 excepto para TTLS, que es de 0.764.

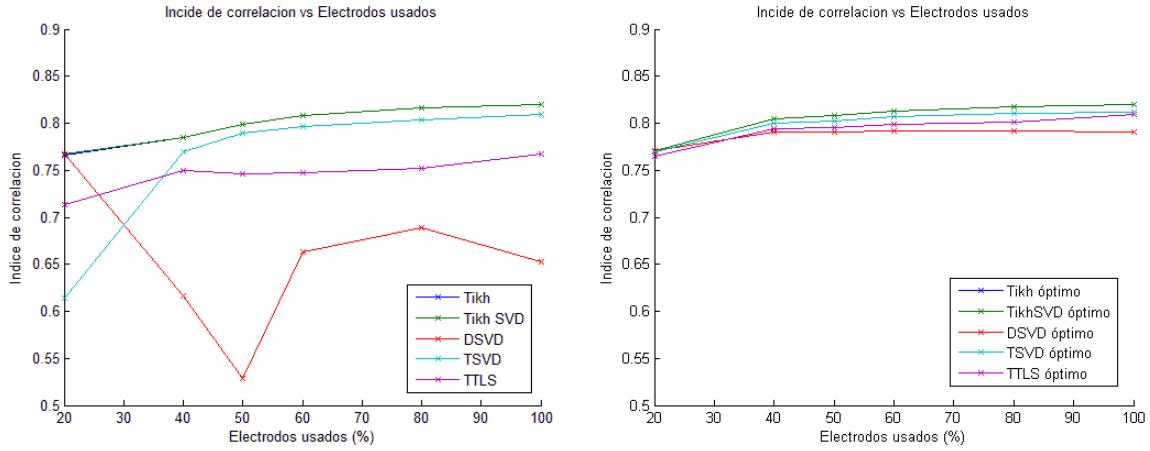


Figura 28: Correlación vs Electrodos en ritmo 50-50. A la izquierda se representa la correlación de las estimaciones calculadas. A la derecha se representa la correlación de las mejores estimaciones que se pueden obtener.

4.3 Ritmo 80% fibrilación auricular y 20% rotor

Este caso de simulación de ritmo cardiaco añade un problema más al que se introduce en el caso 50-50 además de eliminar la propagación normal del impulso eléctrico. El objetivo de usar este caso es el de analizar cómo se complica la estimación a medida que vamos teniendo un ritmo más irregular.

4.3.1 Error vs SNR

Se puede apreciar claramente en la figura 29 que el error es mayor en este caso que en el caso normal aunque el error máximo sigue teniendo un valor en torno a 1.

Los métodos que mejor error relativo presentan siguen siendo Tikhonov y Tikhonov SVD con un error que varía de 0.68 a 1 de manera bastante rápida a medida que disminuye la SNR. El siguiente mejor método es TTLS con una variación de error de 0.62 a 1, pero que cambia más rápidamente que en el caso de Tikhonov. En último lugar quedan los métodos TSVD y DSVD, donde el error mínimo de TSVD es de 0.75 y

termina con un error de 1.1 y DSVD comienza con un error de 0.72 y termina con un error de 1 pero el cambio entre ambos valores es mucho más brusco que TSVD.

Este caso también se diferencia del caso normal en que al medir el error relativo para las mejores estimaciones que se pueden obtener apenas hay diferencia entre métodos, siendo la máxima diferencia de errores de 0.05 exceptuando Tikhonov a una SNR de 1000 dB. Todos los métodos comienzan con un error relativo de 0.48 excepto Tikhonov, que empieza con un error de 0.68, y todos terminan prácticamente en un error relativo de 1.

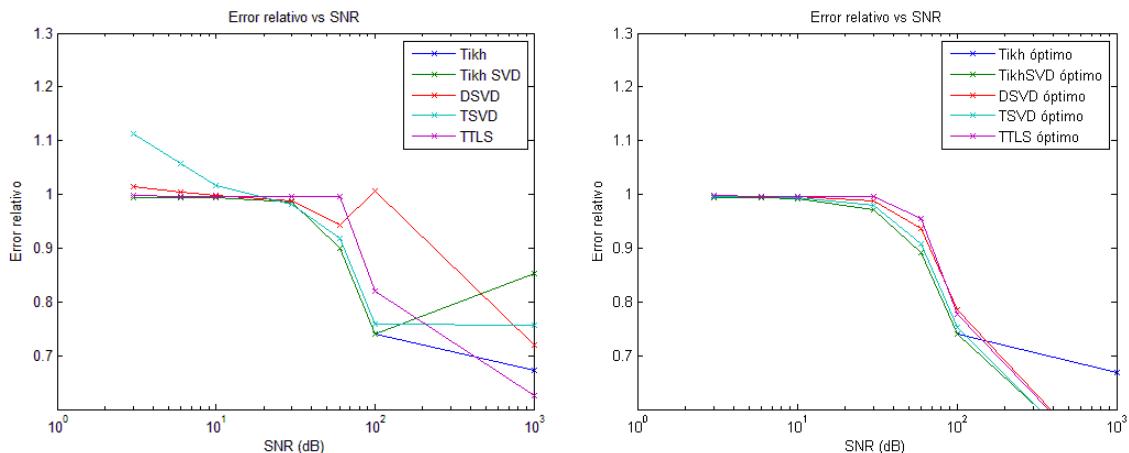


Figura 29: Error relativo vs SNR en ritmo 80-20. A la izquierda se representa el error de las estimaciones calculadas. A la derecha se representa el error de las mejores estimaciones que se pueden obtener.

4.3.2 Correlación vs SNR

La correlación en el caso 80-20 es un poco peor en el caso normal al igual que ocurre con el error relativo. Aunque en ambos casos el comportamiento que sigue la correlación es el mismo, en el caso 80-20 toma valores peores más bruscamente que en el caso normal.

Tikhonov y Tikhonov SVD siguen siendo los métodos que mejor se comportan siendo la máxima correlación aproximadamente 0.69 y la mínima 0.1. TSVD se comporta de manera muy parecida a Tikhonov pero su correlación varía entre 0.67 y 0.05. El método TTLS tiene una correlación entre 0.8 y 0.09 cambiando más rápidamente que el resto al bajar de una SNR de 100 dB. Por último, el método DSVD tiene una correlación que varía entre 0.59 y 0.03 pero siendo su variación entre valores más lenta que para el método TTLS.

Al observar la correlación para los casos óptimos, se obtiene una correlación máxima de 0.9 para todos los métodos menos para Tikhonov, cuya correlación máxima es de 0.75. A pesar de que todos los métodos varían de forma muy parecida, algunos métodos dan una correlación ligeramente superior. El orden de los métodos por el valor de correlación medio es Tikhonov SVD, Tikhonov, TSVD, DSVD y TTLS. El valor mínimo de la correlación varía entre 0.12 y 0.08 dependiendo del método teniendo en cuenta el orden anterior.

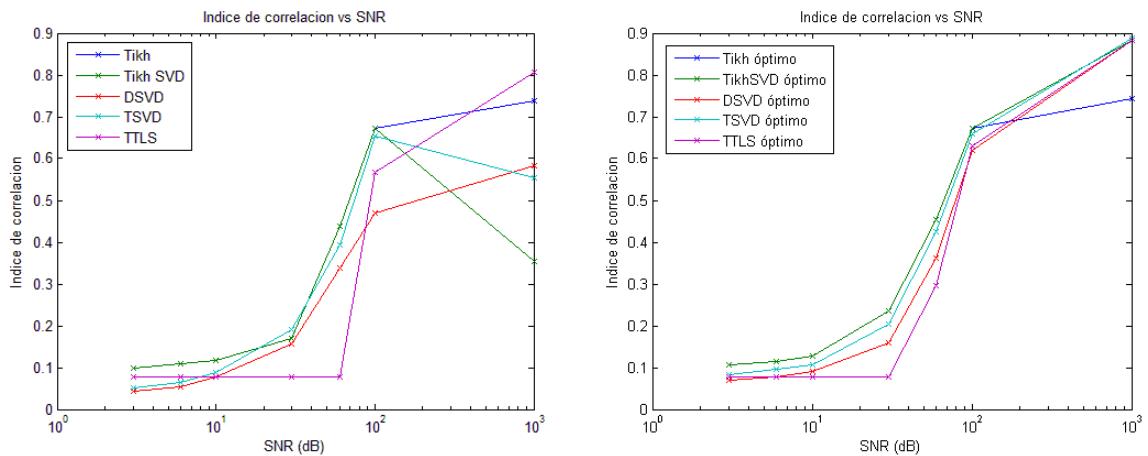


Figura 30: Correlación vs SNR en ritmo 80-20. A la izquierda se representa la correlación de las estimaciones calculadas con la curva-L. A la derecha se representa la correlación de las mejores estimaciones que se pueden obtener.

4.3.3 Error vs Electrodos

El comportamiento del error relativo en líneas generales se mantiene igual que en el caso normal, la única diferencia destacable es que el error relativo en el caso 80-20 es 0.2 unidades mayor que en el caso normal y que al utilizar 128 electrodos (20%) el error aumenta ligeramente más rápido.

El método con mejores prestaciones de error relativo es Tikhonov con una variación entre 0.75 y 0.85. Despues de Tikhonov están los métodos Tikhonov SVD, TSVD y TTLS, siendo el comportamiento entre Tikhonov SVD y TSVD muy similar y variando el error entre 0.75 y 0.94 en Tikhonov SVD y entre 0.77 y 0.96 para TSVD, mientras que para TTLS varía entre los valores 0.8 y 0.88. Por último se encuentra el método DSVD con una variación del error relativo entre 0.86 y 1.

En el caso de haber calculado las estimaciones optimas, el orden de prestaciones en error relativo es Tikhonov, Tikhonov SVD, TSVD, DSVD y TTLS con unos errores mínimos de 0.74, 0.74, 0.76, 0.785 y 0.78 respectivamente, con la mención de que

aunque DSVD tenga un error mínimo mayor que TTLS, TTLS tiene en media un error un poco mayor que DSVD. Todos los métodos tienen un error relativo máximo que varía entre 0.84 y 0.85.

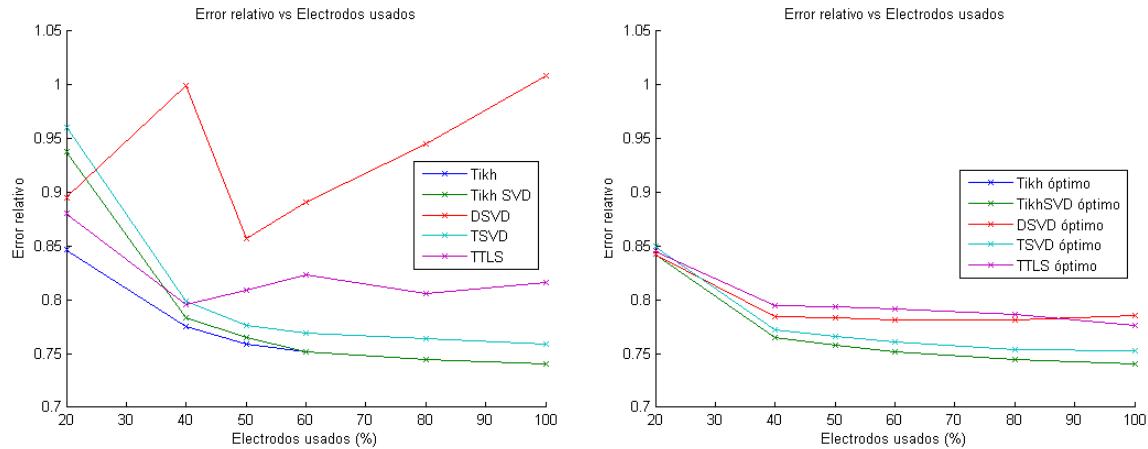


Figura 31: Error relativo vs Electrodos en ritmo 80-20. A la izquierda se representa el error de las estimaciones calculadas con los distintos métodos. A la derecha se representa el error de las mejores estimaciones posibles.

4.3.4 Correlación vs Electrodos

La correlación en función del número de electrodos es aproximadamente 0.2 unidades menor que en el caso normal aunque el comportamiento de la variación es similar como ocurre con el resto de comparaciones realizadas.

El método que mejor funciona es Tikhonov, con una correlación que varía entre 0.65 y 0.53. Después de Tikhonov se encuentran Tikhonov SVD y TSVD, cuyas correlaciones son muy parecidas a Tikhonov excepto para un uso de 128 electrodos (20% del total), donde la correlación de ambos métodos caen hasta un valor de 0.3 en el caso de Tikhonov SVD y un valor de 0.25 para TSVD. El método TTLS tiene una correlación más regular que Tikhonov SVD y TSVD, variando su valor entre 0.6 y 0.5. Por último, el método con peores prestaciones en cuanto a correlación es DSVD, con un comportamiento similar a TTLS y con un rango de correlaciones entre 0.55 y 0.43.

En el caso de los casos óptimos los métodos que mejor correlación tienen son Tikhonov y Tikhonov SVD, con unos valores entre 0.67 y 0.54. Les sigue TSVD con una variación muy similar entre los valores 0.655 y 0.53. Por último, DSVD y TTLS tienen una correlación de 0.54 y 0.535 en el caso de usar 128 electrodos (20%) y una correlación media de 0.62 y 0.61 a partir de utilizar 256 o más electrodos.

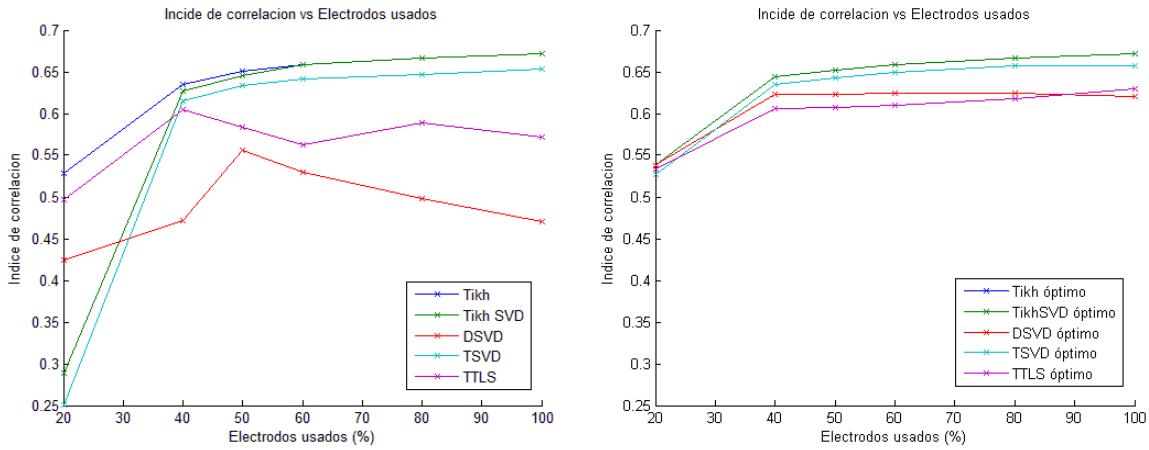


Figura 32: Correlación vs Electrodos en ritmo 80-20. A la izquierda se representa la correlación de las estimaciones calculadas. A la derecha se representa la correlación de las mejores estimaciones que se pueden obtener.

4.4 Análisis comparativo

Para el caso de estudio del RE variando el valor de la SNR (tabla 1), el método que mejor funciona es Tikhonov, tanto en su versión original como en la versión SVD, aunque usando SVD se obtienen unos resultados ligeramente superiores excepto en el estudio del ritmo 80-20 y al tener una SNR de 1000 dB. Cabe destacar que para una SNR de 1000 dB, el RE es menor en el caso 50-50 que en el caso normal debido a la estructura de los datos en ese ritmo. Cuando el ruido AWGN introducido empieza a ser apreciable este orden se corrige como cabría esperar aunque no tiene por qué ocurrir.

En el análisis del RE en función del número de electrodos utilizados (tabla 2) el mejor método sigue siendo Tikhonov, con la diferencia de que en esta ocasión el RE del ritmo 50-50 es ligeramente inferior al del caso normal por el hecho de cómo es la señal sin prácticamente nada de ruido AWGN.

Estudiando las correlaciones (tablas 3 y 4), el comportamiento es exactamente el mismo que para los casos estudiados del error relativo. A muy altos valores de SNR se observa una mejor correlación en el ritmo 50-50 que en el ritmo normal, orden que se invierte al trabajar con SNR menores a 30 dB. Por otro lado, al variar el número de electrodos utilizados, se aprecia que la correlación es mejor en el caso 50-50 por trabajar con una SNR alta y por la estructura de los datos de ese ritmo en particular, al igual que ocurría con el RE.

RE vs SNR	3 dB	6 dB	10 dB	30 dB	60 dB	100 dB	1000 dB
caso normal tikh_svd	0,853	0,858	0,843	0,784	0,702	0,595	0,448
caso 50-50 tikh_svd	0,913	0,905	0,896	0,812	0,700	0,571	0,294
caso 80-20 tikh	0,995	0,994	0,993	0,985	0,899	0,739	0,673

Tabla 1: Comparativa del error vs SNR del mejor método por cada ritmo cardiaco.

RE vs electrodos	20% (128)	40% (256)	50% (321)	60% (385)	80% (513)	100% (652)
caso normal tikh_svd	0,681	0,633	0,620	0,612	0,599	0,596
caso 50-50 tikh_svd	0,640	0,622	0,601	0,588	0,577	0,571
caso 80-20 tikh	0,846	0,775	0,759	0,752	0,744	0,740

Tabla 2: Comparativa del error vs tanto por ciento de electrodos del mejor método por cada ritmo cardiaco.

CC vs SNR	3 dB	6 dB	10 dB	30 dB	60 dB	100 dB	1000 dB
caso normal tikh_svd	0,463	0,476	0,489	0,578	0,685	0,789	0,851
caso 50-50 tikh_svd	0,409	0,432	0,450	0,584	0,713	0,820	0,955
caso 80-20 tikh	0,100	0,110	0,116	0,171	0,438	0,673	0,739

Tabla 3: Comparativa de la correlación vs SNR del mejor método por cada ritmo cardiaco.

CC vs electrodos	20% (128)	40% (256)	50% (321)	60% (385)	80% (513)	100% (652)
caso normal tikh_svd	0,709	0,759	0,770	0,776	0,786	0,788
caso 50-50 tikh_svd	0,767	0,785	0,799	0,808	0,816	0,820
caso 80-20 tikh	0,528	0,635	0,651	0,659	0,667	0,672

Tabla 4: Comparativa de la correlación vs tanto por ciento de electrodos del mejor método por cada ritmo cardiaco.

Capítulo 5

Conclusiones

Una vez analizados los resultados para distintos casos de ritmos cardiacos, utilizando diversas técnicas de regularización, midiendo los resultados en términos de error relativo y de correlación, y variando los valores de SNR o el número de electrodos que se utilizan para medir el potencial en la superficie que modela el torso, se puede afirmar que los resultados obtenidos no son lo suficientemente buenos.

Por un lado, la conclusión a la que se llega después de la aplicación de las distintas técnicas de regularización, es que el método que mejor funciona es Tikhonov, tanto en su versión original como en la forma SVD, ya que en media es el método que ofrece un menor error relativo y una mayor correlación con respecto a los datos reales. Los métodos que mejores prestaciones ofrecen después son TSVD y TTLS, siendo TSVD mejor en error relativo y TTLS mejor en correlación. Y por último, el método que peor funciona en la mayoría de los casos es DSVD. Además, a la hora de utilizar estas técnicas de regularización, cabe destacar la complejidad a la hora de seleccionar el parámetro de regularización. Los datos con los que se ha trabajado no son precisos y al representar la curva-L se obtiene una curva-L con muchas pequeñas variaciones, que hace que la esquina de la curva-L sea muy compleja de detectar.

Una vez analizados el error relativo y la correlación aplicando las distintas técnicas de regularización, para los tres casos de estudios presentados y variando la magnitud de ruido introducido en los datos, se obtienen unos resultados coherentes en comportamiento. Observando el mejor caso posible, que es obtener la estimación que más se parece a los datos reales y aplicando el método que mejor funciona, que es

Tikhonov SVD, para el caso de ritmo normal se obtiene un error en media de 0.7, para el caso de ritmo 50-50 se obtiene un error promedio de 0.721 y para el caso de ritmo 80-20 se obtiene un error promedio de 0.864. Lo mismo ocurre al analizar la correlación, donde para el caso de ritmo normal se tiene una correlación promedio de 0.64, para el ritmo 50-50 se obtiene una correlación media de 0.634 y para el caso de ritmo 80-20 se obtiene una correlación de 0.371. De estos datos se pueden sacar dos conclusiones:

- Entre las estimaciones de distintos tipos de ritmos cardiacos no existe una diferencia especialmente remarcada. Esto se debe a que las técnicas de regularización son capaces de estimar adecuadamente las características principales de los distintos ritmos, pero no el detalle exacto de cada una de ellas. A pesar de que haya bastante diferencia entre el caso normal y el caso 80-20, la estimación calculada solo es capaz de reconocer la forma de onda básica con un mínimo de ruido en los datos, pero los detalles, como las variaciones rápidas en el potencial eléctrico, no es capaz de reconocerlos.
- En media se obtienen unos resultados bastante malos como para que puedan ser aplicados en un entorno real y sea de utilidad. A pesar de que se hayan elegido modelos muy simples, en el caso más sencillo de todos el error que se obtiene es de 0.7 en media. Esto significa que en un escenario en el que exista una pequeñísima parte de ruido AWGN (entre 30 y 60 dB) la mejor estimación posible va a tener dicha cantidad de error relativo, por lo que la estimación, aunque sea medianamente buena y se parezca a la forma de la señal real, está lejos de que se pueda utilizar como una señal para estudiar con detalle las variaciones que existen en el potencial eléctrico. En el mejor de todos los casos donde no hubiera ruido AWGN, se tendría un error relativo de 0.3 y una correlación de 0.942, que son cantidades más idóneas, pero posiblemente sigan siendo insuficientes para un estudio detallado. Lo ideal sería obtener cifras de 0.1 en error y prácticamente 1 en correlación, valores que permitirían asegurar que la estimación sigue un comportamiento prácticamente igual que los datos reales y, por tanto, se podría utilizar dicha estimación para ayudar a diagnosticar arritmias cardiacas complejas.

Después de analizar la variación del número de electrodos utilizados para tomar las medidas en la superficie que modela al torso, la conclusión a la que se llega es que es necesario trabajar con una cantidad relativamente grande de electrodos para hacer uso de toda la información eléctrica de la que se pueda disponer. Esto se debe a que para

realizar una estimación que sea muy fiel a los datos reales se necesita disponer de toda la información posible. En este estudio particular, se han utilizado 642 electrodos para registrar la actividad eléctrica en la superficie que modela al torso, habiendo poca separación entre electrodos. El peor caso que se ha planteado es el de hacer uso únicamente del 20% de estos electrodos, que son 128, y aunque en este caso no se aprecian unos valores peores del error y de la correlación, sí que empiezan a empeorar ligeramente aunque se trabaje con un modelo muy sencillo. Comparando estas cantidades de electrodos con la que se suele utilizar con el BSPM, que son aproximadamente 250 electrodos, se necesitaría recoger más información para poder realizar mejores estimaciones.

Para finalizar, al comparar los resultados obtenidos con los métodos implementados en éste PFC en contraposición a los que contiene el paquete *Regularization Tools*, se aprecia que los resultados obtenidos con el paquete de MATLAB son peores o mucho peores en función del método utilizado. A pesar de que se utilizan los mismos métodos, se debe, por un lado, a la dificultad del cálculo del valor óptimo de regularización, de lo que ya se ha hablado, y por otro lado, a que al ser un paquete orientado a la resolución del problema inverso no se ajusta adecuadamente al problema inverso en electrocardiografía, mientras que los métodos implementados en este PFC sí que se ajustan muy ligeramente, y eso se refleja en los resultados. Esto demuestra que es necesario introducir en el método de estimación información sobre la manera de comportarse de las señales cardíacas para obtener mejores resultados.

Anexo I: Implementación

Este anexo contiene la información de cómo están implementadas las funciones que han sido utilizadas para la realización de este proyecto. Se explican las funciones implementadas de manera breve y la relación que existe entre ellas.

Scripts principales:

- **ECG2EG**

Script que calcula el EG a partir del ECG. Los parámetros a configurar son: el instante para representaciones (T), el tanto por uno del número de electrodos que se utilizan del torso con respecto del número total de electrodos (Nm), el valor de SNR del ruido AWGN añadido a la señal del torso (SNR), el modelo de datos a cargar (Ndata) y el directorio donde se encuentran los datos a cargar (PATH).

- **ECG2EG_SNR**

Script con la misma función que ECG2EG pero variando el valor del parámetro SNR. Guarda los resultados obtenidos en ficheros con el nombre *(SAVEPATH)(Ndata)SNR_(SNR).mat* donde *(SAVEPATH)* es un parámetro con el directorio donde se van a guardar las estimaciones y el resto de nombres entre paréntesis son los parámetros configurados.

- **ECG2EG_Nm**

Script muy similar a ECG2EG_SNR pero variando el valor del parámetro Nm. Guarda las estimaciones calculadas en un fichero con el nombre de *(SAVEPATH)(Ndata)Nm_(Nm).mat* donde *(Nm)* representa el tanto por ciento de los electrodos del torso utilizados con respecto el total de electrodos y el resto de nombres entre paréntesis son los parámetros configurados.

- **MyComparar**

Script encargado de comparar la calidad de las estimaciones calculadas con los datos reales. Los parámetros configurables son: el modelo de datos a cargar (Ndata), el tipo de comparación en función de si varía SNR o Nm (vlabel), el instante utilizado para las representaciones (T), el directorio donde se encuentran los datos originales (PATH) y el directorio donde se encuentran los resultados de las estimaciones (LOADPATH).

Funciones para la carga y la modificación de los datos:

- **MyCargarDatos**

Carga los datos reales de un fichero. Recibe el directorio donde se encuentra el fichero con los datos a cargar y el nombre de dicho fichero. Carga los datos y devuelve las variables cargadas, que son ECG (y), el EG (x), la matriz de transferencia (A) y la geometría del epicardio (geom).

- **MyRuidoAWGN**

Añade ruido AWGN de una potencia determinada en dB a una variable determinada. Se añade una potencia de ruido distinta a cada electrodo que depende de la potencia media que hay en cada electrodo a lo largo del tiempo.

- **MyMuestreoNodos**

Modifica los potenciales del torso y la matriz de transferencia para utilizar N muestras de cada 100 que hubiera originalmente. Las muestras se cogen con el mismo espacio entre ellas con respecto del número total de muestras.

Funciones para el cálculo de estimaciones:

- **MyCalculaMetodos**

Calcula la estimación obtenida al aplicar distintos métodos de regularización. Todas las estimaciones son guardadas en una variable de tipo struct que es lo que devuelve la llamada a esta función.

- **MyCalcularCornerL**

Calcula la esquina de la curva-L buscando donde la curvatura de la propia curva-L es máxima. Además, utiliza un parámetro umbral que limita el valor máximo del eje y para poder localizar de manera más efectiva la esquina. Este umbral se escoge observando los valores de una señal original como muestra para analizar en el peor de los casos cuánto puede llegar a valer la norma-2 de la señal original.

- **MyRepresentarCurvaL**

Representa la curva-L y el valor del parámetro de regularización para cada uno de los puntos de la curva. Marca el valor de la curva-L para el parámetro de regularización elegido para comprobar donde se encuentra dentro de la curva.

- **MyLS**

Calcula la estimación utilizando el método de Mínimos Cuadrados.

- **MyTikhonov**

Calcula la estimación utilizando el método de Tikhonov.

- **MyTikhonovIdeal**

Calcula la estimación utilizando el método de Tikhonov y los datos reales a estimar para obtener el parámetro de regularización óptimo aplicando MSE.

- **MyTikhonovRT**

Calcula la estimación utilizando el método de Tikhonov haciendo uso de las funciones del paquete Regularization Tools.

- **MyTikhonovSVD**

Calcula la estimación utilizando el método de Tikhonov SVD.

- **MyTikhonovSVDIdeal**

Calcula la estimación utilizando el método de Tikhonov SVD y los datos reales a estimar para obtener el parámetro de regularización óptimo aplicando MSE.

- **MyDSVD**

Calcula la estimación utilizando el método de DSVD.

- **MyDSVDidal**

Calcula la estimación utilizando el método de DSVD y los datos reales a estimar para obtener el parámetro de regularización óptimo aplicando MSE.

- **MyDSVDRT**

Calcula la estimación utilizando el método de DSVD haciendo uso de las funciones del paquete Regularization Tools.

- **MyTSVD**

Calcula la estimación utilizando el método de TSVD.

- **MyTSVDideal**

Calcula la estimación utilizando el método de TSVD y los datos reales a estimar para obtener el parámetro de regularización óptimo aplicando MSE.

- **MyTSVDRT**

Calcula la estimación utilizando el método de TSVD haciendo uso de las funciones del paquete Regularization Tools.

- **MyTTLS**

Calcula la estimación utilizando el método de TTLS.

- **MyTTLSideal**

Calcula la estimación utilizando el método de TTLS y los datos reales a estimar para obtener el parámetro de regularización óptimo aplicando MSE.

- **MyTTLSRT**

Calcula la estimación utilizando el método de TTLS haciendo uso de las funciones del paquete Regularization Tools.

Funciones para comparar las estimaciones con los datos reales:

- **MyCalcularComparacion**

Realiza las llamadas a las funciones que se encargan de comparar las estimaciones calculadas con los datos reales.

- **MyCargarEstimaciones**

Carga en una variable las estimaciones calculadas guardadas en ficheros con un determinado nombre. Se pueden cargar las estimaciones calculadas variando la SNR o el número de electrodos y que pertenecen a un mismo modelo de datos. Por ejemplo, se carga el ritmo normal y variación en SNR.

- **MyMSE**

Calcula el error medio cuadrático entre la estimación calculada y los datos reales instante a instante.

- **MyRR**

Calcula el error relativo entre una de las estimaciones calculadas y los datos reales instante a instante.

- **MyCC**

Calcula el coeficiente de correlación entre una de las estimaciones calculadas y los datos reales instante a instante.

- **MyCompararMSE**

Representa el promedio del error medio cuadrático entre distintos métodos y para distintas SNR o porcentaje de número de electrodos con respecto del total. Por un lado representa los métodos de regularización normales y por otro lado los ideales.

- **MyCompararMRR**

Representa el promedio del error relativo entre distintos métodos y para distintas SNR o porcentaje de número de electrodos con respecto del total. Por un lado representa los métodos de regularización normales y por otro lado los ideales.

- **MyCompararMCC**

Representa el promedio del coeficiente de correlación entre distintos métodos y para distintas SNR o porcentaje de número de electrodos con respecto del total. Por un lado representa los métodos de regularización normales y por otro lado los ideales.

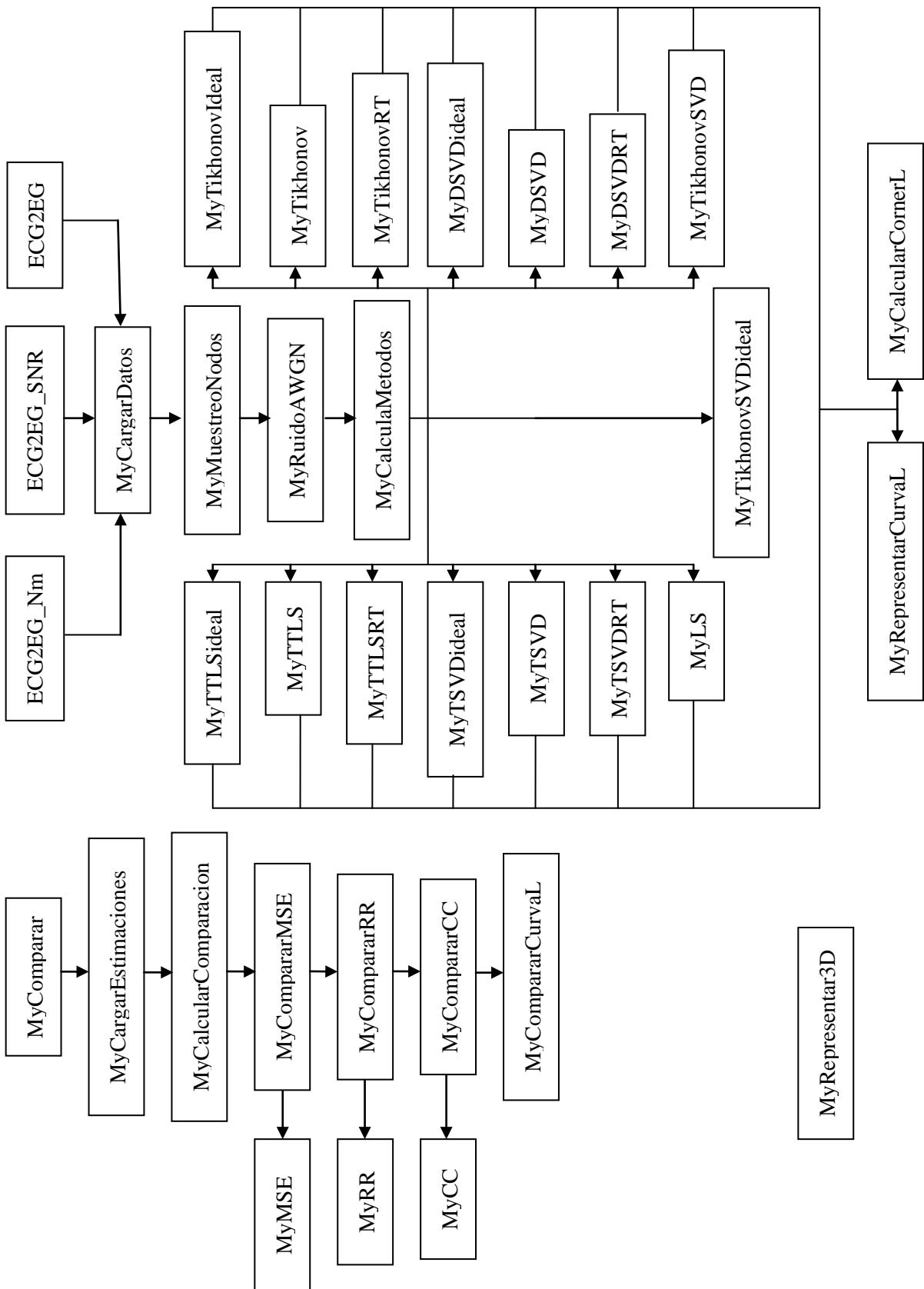
- **MyCompararCurvaL**

Representa la variación de la curva-L en un instante para distintos métodos y distintas SNR o porcentaje de número de electrodos con respecto del total.

- **MyRepresentar3D**

Representa en 3D el potencial a lo largo del tiempo de un electrodo permitiendo observar el parecido entre las estimaciones calculadas y los datos reales. Como máximo permite la representación de los datos reales y de tres estimaciones.

Diagrama de uso de métodos



Anexo II: Tablas de error y correlación

1. Error relativo en función de la SNR

Caso Normal	3 dB	6 dB	10 dB	30 dB	60 dB	100 dB	1000 dB
ls	1,45E+10	9,95E+09	6,40E+09	6,38E+08	2,04E+07	2,00E+05	0,316
tikh	0,853	0,858	0,843	0,784	0,702	0,595	0,505
tikh_svd	0,853	0,858	0,843	0,784	0,702	0,595	0,448
dsvd	1,273	1,106	1,075	1,030	1,010	0,925	0,326
tsvd	0,946	0,980	1,302	0,804	0,718	0,619	0,436
ttls	0,927	0,896	0,885	0,883	0,883	0,646	0,697
tikh_ideal	0,846	0,838	0,825	0,777	0,698	0,591	0,501
tikh_svd_ideal	0,846	0,838	0,825	0,777	0,698	0,591	0,326
dsvd_ideal	0,950	0,936	0,912	0,830	0,740	0,625	0,326
tsvd_ideal	0,931	0,894	0,863	0,787	0,702	0,609	0,316
ttls_ideal	0,927	0,896	0,885	0,883	0,736	0,610	0,323
tikh_RT	0,863	0,858	0,843	0,784	0,703	0,596	0,580
dsvd_RT	1,471	1,253	1,082	1,030	1,010	0,931	0,479
tsvd_RT	8,51E+08	3,51E+08	1,33E+08	9,69E+06	2,09E+05	0,618	0,551
ttls_RT	1,56E+10	1,07E+10	6,98E+09	6,92E+08	2,20E+07	2,17E+05	0,487

Tabla 5: Error relativo vs SNR en el caso Normal. Representa para el modelo de datos normal el error relativo entre las estimaciones calculadas mediante distintas regularizaciones y los datos reales medidos en función del valor de SNR.

Caso 50-50	3 dB	6 dB	10 dB	30 dB	60 dB	100 dB	1000 dB
ls	9,02E+09	6,48E+09	4,04E+09	4,07E+08	1,28E+07	1,27E+05	0,288
tikh	0,913	0,905	0,896	0,812	0,700	0,571	0,473
tikh_svd	0,913	0,905	0,896	0,812	0,700	0,571	0,294
dsvd	1,070	1,010	1,063	0,959	0,984	0,843	0,295
tsvd	0,941	1,058	1,045	0,819	0,712	0,589	0,293
ttls	0,994	0,981	0,977	0,977	0,977	0,640	0,605
tikh_ideal	0,908	0,897	0,873	0,803	0,698	0,571	0,473
tikh_svd_ideal	0,908	0,897	0,873	0,803	0,698	0,571	0,294
dsvd_ideal	0,974	0,967	0,953	0,869	0,751	0,611	0,295
tsvd_ideal	0,924	0,913	0,904	0,816	0,708	0,584	0,288
ttls_ideal	0,994	0,981	0,977	0,977	0,744	0,587	0,293
tikh_RT	0,910	0,904	0,897	0,812	0,700	0,572	0,318
dsvd_RT	1,153	1,117	1,070	0,956	0,984	0,866	0,295
tsvd_RT	4,64E+08	2,19E+08	5,12E+07	1,28E+07	0,712	0,588	0,773
ttls_RT	9,98E+09	7,10E+09	4,48E+09	4,46E+08	1,41E+07	1,40E+05	0,562

Tabla 6: Error relativo vs SNR en el caso 50-50. Representa para el modelo de datos 50-50 el error relativo entre las estimaciones calculadas mediante distintas regularizaciones y los datos reales medidos en función del valor de SNR.

Caso 80-20	3 dB	6 dB	10 dB	30 dB	60 dB	100 dB	1000 dB
ls	3,43E+09	2,43E+09	1,52E+09	1,54E+08	4,86E+06	4,86E+04	0,459
tikh	0,995	0,994	0,993	0,985	0,899	0,739	0,673
tikh_svd	0,995	0,994	0,993	0,985	0,899	0,739	0,853
dsvd	1,014	1,004	0,997	0,987	0,943	1,007	0,719
tsvd	1,113	1,058	1,017	0,982	0,919	0,758	0,757
ttls	0,998	0,997	0,997	0,997	0,997	0,820	0,625
tikh_ideal	0,994	0,993	0,992	0,972	0,891	0,739	0,669
tikh_svd_ideal	0,994	0,993	0,992	0,972	0,891	0,739	0,469
dsvd_ideal	0,997	0,997	0,996	0,987	0,936	0,786	0,469
tsvd_ideal	0,996	0,995	0,994	0,979	0,908	0,753	0,459
ttls_ideal	0,998	0,997	0,997	0,997	0,955	0,776	0,467
tikh_RT	0,995	0,994	0,993	0,985	0,899	0,739	0,985
dsvd_RT	1,014	1,004	0,997	0,987	0,943	1,039	0,905
tsvd_RT	1,94E+08	8,25E+07	3,22E+07	2,06E+06	0,917	0,758	0,975
ttls_RT	3,95E+09	2,78E+09	1,72E+09	1,76E+08	5,57E+06	5,54E+04	0,527

Tabla 7: Error relativo vs SNR en el caso 80-20. Representa para el modelo de datos 80-20 el error relativo entre las estimaciones calculadas mediante distintas regularizaciones y los datos reales medidos en función del valor de SNR.

2. Error relativo en función del número de electrodos

Caso Normal	128 (20%)	256 (40%)	321 (50%)	385 (60%)	513 (80%)	642 (100%)
ls	0,687	36,472	3,30E+02	1,18E+03	2,95E+04	2,05E+05
tikh	0,694	0,633	0,620	0,612	0,599	0,596
tikh_svd	0,681	0,633	0,620	0,612	0,599	0,596
dsvd	0,685	1,007	1,056	0,845	0,873	0,931
tsvd	0,780	0,672	0,629	0,627	0,614	0,619
ttls	0,779	0,666	0,656	0,664	0,656	0,646
tikh_ideal	0,650	0,609	0,602	0,600	0,594	0,591
tikh_svd_ideal	0,650	0,609	0,602	0,600	0,594	0,591
dsvd_ideal	0,650	0,625	0,622	0,624	0,624	0,625
tsvd_ideal	0,652	0,615	0,606	0,607	0,601	0,608
ttls_ideal	0,656	0,630	0,616	0,619	0,618	0,610
tikh_RT	0,721	0,635	0,623	0,614	0,600	0,597
dsvd_RT	0,676	1,007	1,126	1,131	0,876	0,936
tsvd_RT	0,806	0,663	0,624	0,625	0,610	0,618
ttls_RT	1,019	41,456	5,37E+02	1,82E+03	3,30E+04	2,25E+05

Tabla 8: Error relativo vs Tanto por cien de electrodos usados en el caso Normal. Representa para el modelo de datos normal el error relativo entre las estimaciones calculadas mediante distintas regularizaciones y los datos reales medidos en función del tanto por ciento de electrodos utilizados con respecto del total.

Caso 50-50	128 (20%)	256 (40%)	321 (50%)	385 (60%)	513 (80%)	642 (100%)
ls	0,640	21,008	1,94E+02	8,84E+02	1,46E+04	1,29E+05
tikh	0,642	0,622	0,601	0,588	0,577	0,571
tikh_svd	0,640	0,622	0,601	0,588	0,577	0,571
dsvd	0,640	0,926	1,152	0,859	0,777	0,848
tsvd	0,780	0,657	0,618	0,607	0,597	0,588
ttls	0,722	0,660	0,664	0,662	0,657	0,640
tikh_ideal	0,635	0,593	0,587	0,582	0,574	0,571
tikh_svd_ideal	0,635	0,593	0,587	0,582	0,574	0,571
dsvd_ideal	0,636	0,611	0,611	0,610	0,610	0,612
tsvd_ideal	0,637	0,600	0,596	0,590	0,585	0,583
ttls_ideal	0,644	0,607	0,605	0,600	0,598	0,587
tikh_RT	0,643	0,625	0,602	0,589	0,577	0,571
dsvd_RT	0,640	0,939	1,152	1,116	0,972	0,884
tsvd_RT	0,870	0,648	0,618	0,604	0,592	0,587
ttls_RT	0,920	24,224	2,77E+02	1,30E+03	1,71E+04	1,43E+05

Tabla 9: Error relativo vs Tanto por cien de electrodos usados en el caso 50-50. Representa para el modelo de datos 50-50 el error relativo entre las estimaciones calculadas mediante distintas regularizaciones y los datos reales medidos en función del tanto por ciento de electrodos utilizados con respecto del total

Caso 80-20	128 (20%)	256 (40%)	321 (50%)	385 (60%)	513 (80%)	642 (100%)
ls	0,843	7,408	66,884	4,10E+02	4,14E+03	4,82E+04
tikh	0,846	0,775	0,759	0,752	0,744	0,740
tikh_svd	0,938	0,784	0,765	0,752	0,744	0,740
dsvd	0,895	1,000	0,857	0,891	0,945	1,009
tsvd	0,961	0,799	0,776	0,769	0,764	0,759
ttls	0,880	0,796	0,809	0,824	0,806	0,816
tikh_ideal	0,842	0,765	0,758	0,752	0,744	0,740
tikh_svd_ideal	0,842	0,765	0,758	0,752	0,744	0,740
dsvd_ideal	0,842	0,785	0,783	0,782	0,781	0,786
tsvd_ideal	0,849	0,772	0,766	0,761	0,754	0,753
ttls_ideal	0,845	0,795	0,794	0,792	0,786	0,776
tikh_RT	0,989	0,787	0,770	0,752	0,744	0,740
dsvd_RT	0,953	0,996	1,012	0,891	0,945	1,036
tsvd_RT	0,976	0,806	0,776	0,767	0,759	0,758
ttls_RT	0,970	8,685	85,272	5,14E+02	4,44E+03	5,51E+04

Tabla 10: Error relativo vs Tanto por cien de electrodos usados en el caso 80-20. Representa para el modelo de datos 80-20 el error relativo entre las estimaciones calculadas mediante distintas regularizaciones y los datos reales medidos en función del tanto por ciento de electrodos utilizados con respecto del total

3. Correlación en función de la SNR

Caso Normal	3 dB	6 dB	10 dB	30 dB	60 dB	100 dB	1000 dB
ls	5,45E-04	1,35E-03	-1,34E-04	-7,77E-04	-8,07E-04	-1,19E-04	0,945
tikh	0,463	0,476	0,489	0,578	0,685	0,789	0,854
tikh_svd	0,463	0,476	0,489	0,578	0,685	0,789	0,851
dsvd	0,176	0,236	0,271	0,383	0,477	0,598	0,942
tsvd	0,403	0,417	0,325	0,568	0,666	0,768	0,885
ttls	0,352	0,353	0,354	0,355	0,355	0,740	0,812
tikh_ideal	0,474	0,487	0,511	0,589	0,689	0,791	0,855
tikh_svd_ideal	0,474	0,487	0,511	0,589	0,689	0,791	0,942
dsvd_ideal	0,304	0,335	0,375	0,520	0,641	0,762	0,942
tsvd_ideal	0,363	0,428	0,463	0,577	0,685	0,776	0,945
ttls_ideal	0,352	0,353	0,354	0,355	0,648	0,774	0,943
tikh_RT	0,463	0,476	0,489	0,578	0,685	0,789	0,756
dsvd_RT	0,159	0,208	0,267	0,383	0,477	0,596	0,843
tsvd_RT	0,037	0,103	0,196	0,298	0,626	0,769	0,790
ttls_RT	1,14E-03	1,79E-03	-4,31E-04	-1,01E-03	-7,01E-04	-9,27E-05	0,884

Tabla 11: Correlación vs SNR en el caso Normal. Representa para el modelo de datos normal el índice de correlación entre las estimaciones calculadas mediante distintas regularizaciones y los datos reales medidos en función del valor de SNR.

Caso 50-50	3 dB	6 dB	10 dB	30 dB	60 dB	100 dB	1000 dB
ls	1,56E-03	4,77E-04	-1,11E-05	1,42E-03	-5,06E-04	-6,47E-04	0,957
tikh	0,409	0,432	0,450	0,584	0,713	0,820	0,880
tikh_svd	0,409	0,432	0,450	0,584	0,713	0,820	0,955
dsvd	0,173	0,219	0,243	0,423	0,508	0,655	0,955
tsvd	0,387	0,364	0,377	0,580	0,701	0,808	0,955
ttls	0,209	0,211	0,212	0,212	0,212	0,767	0,840
tikh_ideal	0,422	0,446	0,487	0,596	0,715	0,820	0,880
tikh_svd_ideal	0,422	0,446	0,487	0,596	0,715	0,820	0,955
dsvd_ideal	0,234	0,274	0,313	0,496	0,662	0,791	0,955
tsvd_ideal	0,388	0,409	0,426	0,581	0,706	0,811	0,957
ttls_ideal	0,209	0,211	0,212	0,212	0,666	0,809	0,956
tikh_RT	0,417	0,433	0,449	0,583	0,713	0,820	0,941
dsvd_RT	0,164	0,197	0,240	0,426	0,508	0,646	0,955
tsvd_RT	0,057	0,147	0,225	0,247	0,701	0,809	0,632
ttls_RT	1,22E-03	1,05E-04	-1,45E-04	1,58E-03	-4,01E-04	-7,43E-04	0,852

Tabla 12: Correlación vs SNR en el caso 50-50. Representa para el modelo de datos 50-50 el índice de correlación entre las estimaciones calculadas mediante distintas regularizaciones y los datos reales medidos en función del valor de SNR.

Caso 80-20	3 dB	6 dB	10 dB	30 dB	60 dB	100 dB	1000 dB
ls	1,28E-03	-2,87E-04	-2,43E-05	7,45E-04	-2,48E-03	-1,16E-03	0,888
tikh	0,100	0,110	0,116	0,171	0,438	0,673	0,739
tikh_svd	0,100	0,110	0,116	0,171	0,438	0,673	0,355
dsvd	0,042	0,055	0,079	0,158	0,339	0,471	0,583
tsvd	0,050	0,065	0,087	0,191	0,393	0,653	0,555
ttls	0,077	0,077	0,077	0,078	0,078	0,567	0,805
tikh_ideal	0,108	0,115	0,127	0,235	0,455	0,673	0,743
tikh_svd_ideal	0,108	0,115	0,127	0,235	0,455	0,673	0,883
dsvd_ideal	0,070	0,079	0,092	0,159	0,362	0,621	0,883
tsvd_ideal	0,083	0,096	0,106	0,205	0,424	0,659	0,888
ttls_ideal	0,077	0,077	0,077	0,078	0,296	0,630	0,884
tikh_RT	0,102	0,111	0,116	0,172	0,437	0,673	0,165
dsvd_RT	0,042	0,055	0,079	0,158	0,339	0,451	0,352
tsvd_RT	9,31E-03	0,035	0,064	0,171	0,398	0,653	0,221
ttls_RT	1,64E-03	-3,17E-04	4,69E-04	9,54E-04	-1,55E-03	-1,46E-03	0,854

Tabla 13: Correlación vs SNR en el caso 80-20. Representa para el modelo de datos 80-20 el índice de correlación entre las estimaciones calculadas mediante distintas regularizaciones y los datos reales medidos en función del valor de SNR.

4. Correlación en función del número de electrodos

Caso Normal	128 (20%)	256 (40%)	321 (50%)	385 (60%)	513 (80%)	642 (100%)
ls	0,722	0,026	6,16E-03	-1,08E-03	1,01E-03	-5,06E-04
tikh	0,718	0,759	0,770	0,776	0,786	0,788
tikh_svd	0,709	0,759	0,770	0,776	0,786	0,788
dsvd	0,723	0,563	0,554	0,650	0,625	0,596
tsvd	0,574	0,733	0,763	0,766	0,774	0,769
ttls	0,669	0,721	0,731	0,723	0,731	0,740
tikh_ideal	0,738	0,775	0,781	0,783	0,788	0,790
tikh_svd_ideal	0,738	0,775	0,781	0,783	0,788	0,790
dsvd_ideal	0,737	0,762	0,764	0,763	0,763	0,762
tsvd_ideal	0,735	0,770	0,778	0,777	0,782	0,776
ttls_ideal	0,732	0,757	0,769	0,767	0,768	0,774
tikh_RT	0,649	0,758	0,768	0,775	0,786	0,788
dsvd_RT	0,714	0,563	0,521	0,522	0,624	0,594
tsvd_RT	0,528	0,736	0,767	0,766	0,776	0,769
ttls_RT	0,566	0,023	4,42E-03	-1,07E-03	7,20E-04	-6,40E-04

Tabla 14: Correlación vs Tanto por cien de electrodos utilizados en el caso Normal. Representa para el modelo de datos normal el índice de correlación entre las estimaciones calculadas mediante distintas regularizaciones y los datos reales medidos en función del tanto por ciento de electrodos utilizados con respecto del total.

Caso 50-50	128 (20%)	256 (40%)	321 (50%)	385 (60%)	513 (80%)	642 (100%)
ls	0,767	0,038	4,82E-03	1,75E-03	4,69E-04	-1,45E-03
tikh	0,766	0,785	0,799	0,808	0,816	0,820
tikh_svd	0,767	0,785	0,799	0,808	0,816	0,820
dsvd	0,767	0,616	0,529	0,663	0,689	0,652
tsvd	0,614	0,769	0,789	0,796	0,803	0,809
ttls	0,714	0,749	0,746	0,748	0,752	0,767
tikh_ideal	0,771	0,804	0,808	0,813	0,818	0,820
tikh_svd_ideal	0,771	0,804	0,808	0,813	0,818	0,820
dsvd_ideal	0,771	0,791	0,791	0,792	0,792	0,791
tsvd_ideal	0,769	0,799	0,803	0,806	0,811	0,812
ttls_ideal	0,764	0,794	0,796	0,799	0,801	0,809
tikh_RT	0,765	0,784	0,799	0,808	0,816	0,820
dsvd_RT	0,767	0,611	0,529	0,551	0,607	0,638
tsvd_RT	0,456	0,773	0,789	0,798	0,806	0,810
ttls_RT	0,598	0,034	3,36E-03	1,23E-03	-7,33E-05	-1,75E-03

Tabla 15: Correlación vs Tanto por cien de electrodos utilizados en el caso 50-50.
 Representa para el modelo de datos normal el índice de correlación entre las estimaciones calculadas mediante distintas regularizaciones y los datos reales medidos en función del tanto por ciento de electrodos utilizados con respecto del total.

Caso 80-20	128 (20%)	256 (40%)	321 (50%)	385 (60%)	513 (80%)	642 (100%)
ls	0,538	0,071	6,45E-03	2,65E-03	-2,71E-04	-3,57E-04
tikh	0,528	0,635	0,651	0,659	0,667	0,672
tikh_svd	0,289	0,627	0,645	0,658	0,667	0,672
dsvd	0,425	0,472	0,556	0,529	0,498	0,470
tsvd	0,250	0,614	0,634	0,641	0,647	0,653
ttls	0,497	0,605	0,584	0,562	0,589	0,572
tikh_ideal	0,538	0,643	0,651	0,659	0,667	0,672
tikh_svd_ideal	0,538	0,643	0,651	0,659	0,667	0,672
dsvd_ideal	0,538	0,623	0,623	0,624	0,624	0,621
tsvd_ideal	0,527	0,635	0,643	0,649	0,657	0,658
ttls_ideal	0,533	0,606	0,607	0,610	0,618	0,629
tikh_RT	0,151	0,624	0,641	0,659	0,667	0,672
dsvd_RT	0,289	0,474	0,477	0,529	0,498	0,452
tsvd_RT	0,192	0,591	0,635	0,643	0,652	0,653
ttls_RT	0,408	0,062	5,23E-03	2,89E-03	-7,33E-04	5,82E-04

Tabla 16: Correlación vs Tanto por cien de electrodos utilizados en el caso 80-20.
 Representa para el modelo de datos 80-20 el índice de correlación entre las estimaciones calculadas mediante distintas regularizaciones y los datos reales medidos en función del tanto por ciento de electrodos utilizados con respecto del total.

Bibliografía

- [1] F. J. C. Gascó, Cardiología clínica, Publicaciones de la Universidad de Valencia, 2011.
- [2] R. G. Civera y R. R. Granell, Electrofisiología cardiaca clínica y ablación, McGraw Hill-Interamericana, 1999.
- [3] W. N. Kelley, Medicina interna, Segunda ed., Ed. Médica Panamericana, 1993.
- [4] E. M. Cuenca, Fundamentos de fisiología, Editorial Paraninfo, 2006.
- [5] F. M. Filipoiu, Atlas of Heart Anatomy and Development, Springer Science & Business Media, 2013.
- [6] P. A. Iaizzo, Handbook of Cardiac Anatomy, Physiology, and Devices, Segunda ed., Springer Science & Business Media, 2010.
- [7] cienciasnaturales. <http://cienciasnaturales.es/CIRCULATORIO.swf>. [Último acceso: 22 Diciembre 2014].
- [8] Universidad Nacional del Nordeste. Facultad de medicina. <http://www.med.unne.edu.ar/enfermeria/catedras/fisio/clases07/010>. [Último acceso: 22 Diciembre 2014].
- [9] University of Utah. http://library.med.utah.edu/kw/pharm/hyper_heart1.html. [Último acceso: 22 Diciembre 2014].
- [10] F. A. Atienza, Estudio del campo eléctrico registrado en catéteres durante trastornos en la conducción cardiaca, 2012.
- [11] J. P. Torrecilla, Implementación y estudio de métodos numéricos para la resolución del problema directo e inverso de la electrocardiografía: modelado de la actividad eléctrica en la superficie del torso, Tesis de Master, 2010.
- [12] P. W. Macfarlane, A. v. Oosterom, O. Pahlm, P. Kligfield, M. Janse y J. Camm, Comprehensive Electrocardiology, Springer Science & Business Media, 2010.
- [13] DALCAME, Centro de investigación de Biomedicina. <http://www.dalcame.com/ecg.html#.VJ75DUiA>. [Último acceso: 22 Diciembre 2014].
- [14] L. W. & Wilkins, ECG Strip Ease. An Arrhythmia Interpretation Workbook, Wolters Kluwer Health, 2006.

- [15] D. A. Feo, Manual de arritmias cardiacas, Universidad Central de Venezuela, 2004.
- [16] Y. Jiang, Solving the Inverse Problem of Electrocardiography in a Realistic Environment, KIT Scientific Publishing, 2010.
- [17] D. Poole, Álgebra Lineal. Una introducción moderna., Tercera ed., CENGAGE Learning, 2011.
- [18] T. Hastie, R. Ribshirani y J. Friedman, The Elements of Statistical Learning. Data Mining, Inference, and Prediction, Segunda ed., Springer, 2008.
- [19] ECGSIM. www.ecgsim.org
- [20] MATLAB. es.mathworks.com
- [21] Regularization Tools. www.imm.dtu.dk/~pcha/Regutools
- [22] C. Hansen, «Regularization Tools. A Matlab Package for Analysis and Solution of Discrete Ill-Posed Problems» nº Version 4.1 for Matlab 7.3, 2008.
- [23] P. C. Hansen, «The L-curve and its use in the numerical treatment of inverse problems» 1999.
- [24] F. C. Patino, «Level Sets Applied to Inverse Problem in Electrocardiography» 2004.
- [25] P. C. Hansen, «The truncated SVD as a method for regularization» 1986.
- [26] R. D. Fierro, G. H. Golub, P. C. Hansen y D. P. O'Leary, «Regularization by Truncated Total Least Squares» 1997.
- [27] Real Academia Española de la Lengua. www.rae.es

